

N° D'ORDRE :

825

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR-INGÉNIEUR

par

Christian LERIN

1^{re} THÈSE : Association du réseau électrique et des calculatrices arithmétiques pour la détermination des trajectoires électroniques - Application à la propulsion ionique.

2^e THÈSE : Mécanique des fluides des émulsions.

Soutenues le 2 juillet 1963 devant la Commission d'examen.

MM. MALAVARD Président.

BRUN
SIESTRUNCK } Examineurs.

O.N.E.R.A.

29, Avenue de la Division Leclerc
CHATILLON-SOUS-BAGNEUX

1962

THÈSES
PRÉSENTÉES
A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS
POUR OBTENIR
LE TITRE DE DOCTEUR-INGÉNIEUR

par

Christian LERIN

- 1^{re} THÈSE : Association du réseau électrique et des calculatrices arithmétiques pour la détermination des trajectoires électroniques - Application à la propulsion ionique.
- 2^e THÈSE : Mécanique des fluides des émulsions.

Soutenues le 2 juillet 1963 devant la Commission d'examen.

MM. MALAVARD Président.

BRUN
SIESTRUNCK } Examineurs.



O. N. E. R. A.
29, Avenue de la Division Leclerc
CHATILLON - SOUS - BAGNEUX
1962

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PROFESSEURS

Doyen M. ZAMANSKY

G. JULIA	T Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	MAY	T Zoologie (Orsay).
PRENANT	T Anatomie et Histologie comparées.	CHOQUET	T Théorie des fonctions et Topologie.
GRASSÉ	T Evolution des êtres organisés.	FELDMANN	T Biologie Végétale marine.
PREVOST	T Chimie organique.	GUINIER	T Physique des Solides (Orsay).
WYART	T Minéralogie et Cristal.	JOST	T Physiologie comparée.
TEISSIER	T Zoologie.	FORTET	T Calcul des Probabilités et Physique mathématique.
MANGENOT	T Biologie Vég. (Orsay).	SCHWARTZ	T Calcul diff. et Intégral.
AUGER	T Physique quantique et Relativité.	CHOUARD	T Physiologie Végétale.
MONNIER	T Physiologie Générale.	MALAVARD	T Aviation (Techn. Aéronaut.).
PIVETEAU	T Paléontologie.	BRELOT	T Calcul diff. et intégral.
ROCARD	T Physique (E.N.S.).	NORMANT	T Synthèse organique générale.
CARTAN	T Mathématiques (E.N.S.).	BENARD	T Chimie Minérale.
L'AFFITTE	T Chimie générale.	BUVAT	T Botanique (E.N.S.).
FAVARD	T Géométrie supérieure.	DUGUE	T Statistiques Mathématiques.
COULOMB	T Physique du Globe.	SOULAIRAC	T Psychophysiologie.
Mlle COUSIN	T Biologie Animale (S.P.C.N.).	ULRICH	T Physiologie Végétale.
CHRETIEN	T Chimie minérale.	MARECHAL	T Optique théorique et Appl.
DRACH	T Zoologie	KIRPMANN	T Théories chimiques.
KASTLER	T Physique (E.N.S.).	CHADEFAUD	T Botanique.
EPHRUSSI	T Génétique.	Mlle LE BRETON	T Physiologie de la nutri.
RIVIERE	T Géologie (S.P.C.N.) et sédim.	SALEM	T Mathématiques générales.
GAUTHERET	T Biologie Vég. (P.C.B.).	LELONG	T Applic. de l'analyse à la géométrie.
LUCAS R.	T Recherches Physiques.	DEVILLERS	T Anatomie et Histologie comparées.
THOMAS A.	T Biologie cellulaire.	EHRESMANN	T Topologie Algébrique.
ARNULF	T Optique appliquée.	FRANÇON	T Physique (S.P.C.N.).
MORAND	T Physique Enseignement.	GLANGEAUD	T Géographie phys. et Géologie dynamique.
SOLEILLET	T Physique (P.C.B.).	GODEMENT	T Mathématiques (M.P.C.).
FORTIER	T Mécanique exp. des Fluides.	PISOT	T Technique mathématique de la Physique.
DANJON	T Astronomie.	ROCH	T Géologie.
PETIT	T Biologie maritime.	SCHATZMAN	T Astrophysique.
QUENEY	T Météorologie et dynamique atmosphérique.	TERMIER	T Paléontologie stratig.
GALLIEN	T Embryologie.	ZAMANSKY	T Mathématiques générales.
EICHHORN	T Botanique.	LENNUIER	T Physique (M.G.P.).
DE CUGNAC	T Biologie végétale (S.P.C.N.).	RIZET	T Génétique (Orsay).
Mlle CAUCHOIS	T Chimie Physique.	ROUTHIER	T Géologie appliquée.
THELLIER	T Physique du Globe.	Mme TONNELAT	T Physique théorique.
L'HERITIER	T Biologie Générale (Orsay).	DIXMIER	T Mathématiques (M.P.C.).
GRIVET	T Radioélectricité (Orsay).	SOUCHAY	T Chimie générale.
PONCIN	T Mécanique Générale.	AIGRAIN	T Electrotechnique général.
DUBREIL	T Arithmétique et théorie des Nombres.	BRUSSET	T Chimie systématique.
QUELET	T Chimie Organique.	M. LEVY	T Physique théorique des hautes énergies (Orsay).
CAGNIARD	T Géophysique appliquée.	Mme CHAIX	T Chimie biologique.
CHAMPETIER	T Chimie macromoléculaire.	Mme HUREL-PY	T Biologie végétale (P.C.B.).
CUVILLIER	T Micropaléontologie.	PIAUX	T Chimie (M.P.C.).
JUNG	T Pétrographie.	BRUN	T Mécan. théorique des Fluides.
TRILLAT	T Microscopie et diffraction électronique.	LEDERER	T Chimie biologique.
WIEMANN	T Chimie organique et struc.	Mme DUBREIL	T Mathém. (Agrégation).
JACQUINOT	T Spectroscopie et physique céleste (Orsay).	Mme LE LONG	T Mathématiques (E.N.S.).
VASSY	T Physique de l'atmosphère.	BELLAIR	T Géologie (S.P.C.N.).
DESTOUCHES	T Théories Physiques.	COTTE	T Physique électricité.
AMIEL	T Chimie générale.	DUBOIS J.E.	T Chimie organique.
HOCART	T Minéralogie et Cristallog.	LAMOTTE	T Zoologie (E.N.S.).
J.P. MATHIEU	T Physique (Optique).	MICHEL A.	T Chimie Minérale (Orsay).
COUTEAUX	T Biologie animale (P.C.B.).	OLMER	T Energétique générale.

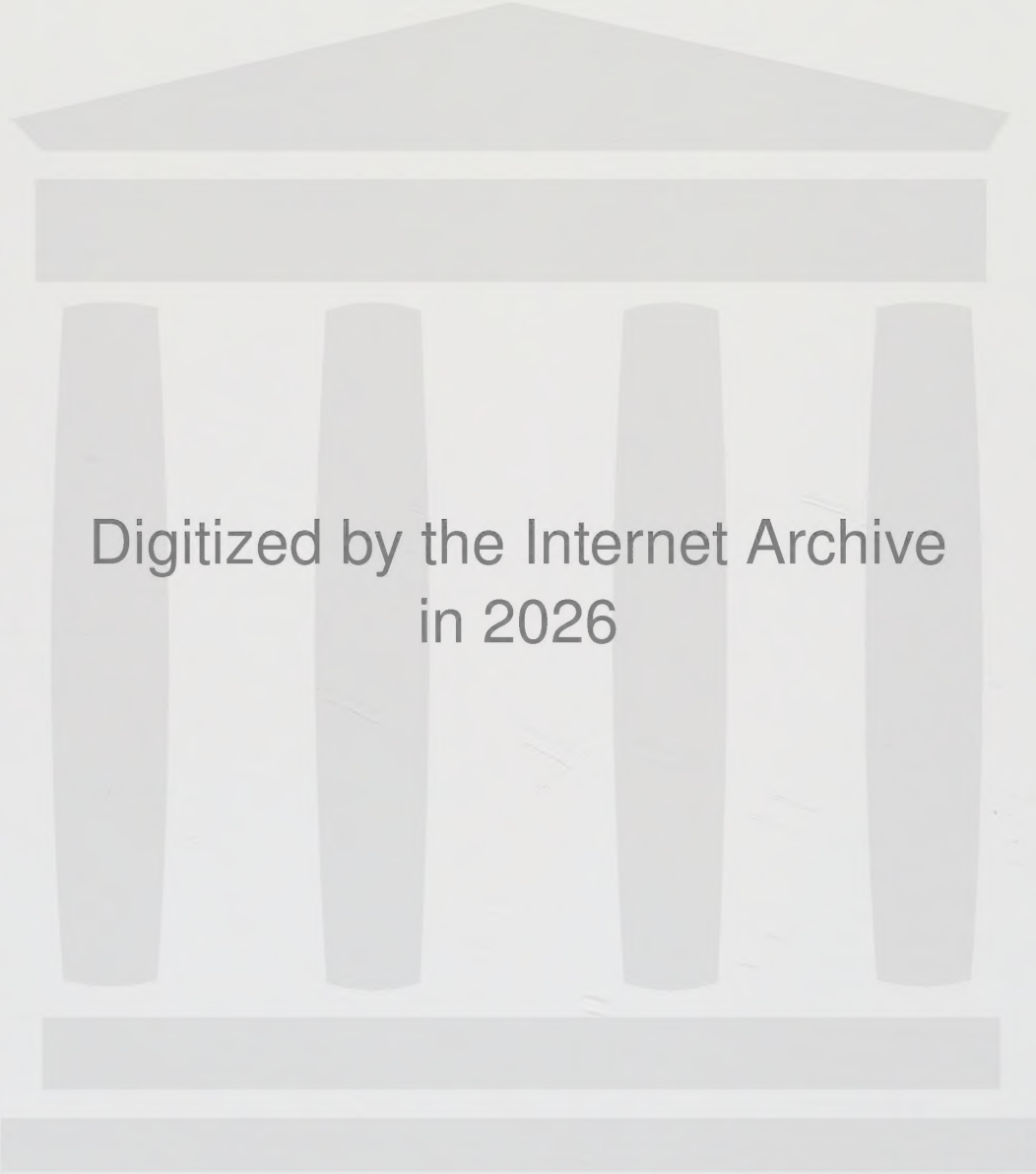
ROUAULT	T Electricité (Orsay).	DURAND-DELGA	Géologie.
GAUTHIER	T Mécanique appliquée.	FREON	T Chimie organique (Orsay).
BARCHEWITZ	T Chimie Physique.	HELLER	T Physiologie végétale.
BROSSEL	T Physique atomique.	TORTRAT	T Calcul des Probabilités.
BUSER	T Physiologie comparée.	CAILLEUX	Géologie (S.P.C.N.).
CAMUS	T Physiologie Vég. (B.M.P.V.).	MAGNAN	T Physique (S.P.C.N.).
CASTAING	T Physique (Orsay).	DAUDEL	T Mécanique ondulatoire appl. à la Chim. Théor. et à la Phys. Nucléaire.
CURIEN	T Minéralo. et Cristallog.	Melle FOURCROY	Biol. végétale (S.P.C.N.).
MOYSE	T Physiologie Végé. (Orsay).	Mme CHOQUET-BRUHAT	T Méc. Analytique et Méc. céleste.
NOIROT	T Evolution des Etres Org.		Physiologie Générale.
PANNETIER	T Chimie générale (Orsay).	Melle VEIL	T Microbiologie.
POSSOMPES	T Zoologie.	LWOFF	T Mécan. Phys. et Expérim.
PULLMANN	T Chimie théorique.	SIESTRUNCK	T Métallur. des métaux Nucl.
TEILLAC	T Physique Nucl. et Radioactivité.	LACOMBE	T Physique (P.C.B.) Orsay.
TONNELAT	T Biologie Physico-chim.	BROCHARD	T Mécanique générale.
VILLE	T Econométrie.	CABANNES	T Mathématiques (M.P.C.) Orsay.
WILLEMART	T Chimie (P.C.B.).	LESIEUR	T Mécanique générale (Orsay).
DODE	T Chimie (Orsay).	MAZET	Géographie phys. et Géol. Dynamique.
FREYMANN	T Recherches Physiques.	CAIRE	
GUINOCHET	T Biol. Vég. (S.P.C.N.) Orsay.	COMOLET	T Mécanique des Fluides.
ROLLET	T Chimie (P.C.B.).	CORABOEUF	Physiologie Animale.
Melle JOSIEN	T Chimie (S.P.C.N.).	DELLOUE	Physique de l'exosphère.
CHEVALLEY	T Géométrie algébrique et théorie des groupes.	GORENFLOT	Botanique II (Orsay).
ARNOULT	T Electronique (Orsay).	HOULLON	Biologie Animale (P.C.B.).
CHAPELLE	T Physique (Orsay).	JULLIEN J.	Chimie (P.C.B.).
DELANGE	T Mathématiques (Orsay).	MALGRANGE	T Tech. Math. de la Phys. Antropologie.
DENY	T Mathématiques Gén. (Orsay).	OLIVIER	T Botanique II (Orsay).
GERMAIN	T Mécan. théor. des fluides.	NOZERAN	Physique (E.N.S.) Orsay.
LUCAS G.	T Géologie.	BLANC-LAPIERRE	T Botanique (Orsay).
ALLARD	T Chimie Physique.	CHEVAUGEON	T Mathématiques (Orsay).
BERTHELOT	T Phys. Fondamentale des Hautes Energies (Orsay).	KAHANE	T Mathématiques ENS féminines.
BRICART	T Météorologie et phys. de l'atmosphère.	SAMUEL	T Astronomie (Orsay).
Mme ALBE-FESSARD	T Psychophysiologie.	KOURGANOFF	T Mécanique céleste.
FRIEDEL	T Physique des Solides (Orsay).	THIRY	Physique SPCN
M. JULIA	Etudes des Moléculaires naturelles complexes.	AMAT	Physique PCB
LENDER	T Biol. Animale (S.P.C.N.) Orsay.	AUBOIN	Géologie
MAGAT	Physico-chimie des radio-éléments.	Mme BENOIT-GUEUTAL	Physique nucléaire et radioactivité
Melle QUINTIN	T Electrochimie.		Biologie marine (Villefranche s/ mer)
MONOD	T Chimie du métabolisme.	BOUGIS	T Mathématiques MPC
BENOIT	T Physiol. Anim. (Orsay)	BRUHAT	T Géologie historique (Orsay)
DE POSSEL	T Analyse numérique.	BRUNN	Physique MGP (Orsay)
CHARLOT	T Chimie analytique.	CHABBAL	T Mathématiques Propé. (Orsay)
LEMEE	T Physiol. Vég. (B.M.P.V.) Orsay.	DEHEUVELS	Physique théorique (Orsay)
GUERIN	T Chimie (M.P.C.) Orsay.	D'ESPAGNAT	Géologie SPCN
CHATELET M.	T Chimie (P.C.B.).	FURON	T Génétique
JEAN	T Physique Nucléaire (Orsay).	Mme CANS	Biologie végétale PCB
MATTLER	T Physique (S.P.C.N.)	GENEVES	Physique (CUS Orléans)
BERGERARD	T Zoologie (Orsay).	GUILBERT	Pétrographie
BERTEIN	T Electronique (Orsay).	HUPE	T Biologie générale
BOUSSIÈRES	Chimie des Radioéléments (Orsay).	HOLLANDE	T Analyse numérique
Mme COUTURE	T Thermodynamique et Méc. Physique.	LIONS	Chimie PCB
ELLENBERGER	T Géologie appli. s/ le terr.	MAITTE	Physique propédeutique
FRANC	Biol. Animale (P.C.B.).	MEYER	Géologie appliquée
SCHNELL	Botanique tropicale (Orsay).	NICOLAS	Biologie générale
STOLKOWSKI	Physiologie générale.	PANIGEL	Pétrographie
ACHER	Chimie Biol. (Orsay).	RAVIER	T Mécanique théorique des fluides
BAUDOIN	Biologie animale (P.C.B.).	ROSEAU	Electronique
BEAUMONT	Biologie animale (S.P.C.N.).	ROUBINE	T Chimie P.C.B.
BLAMONT	T Géophysique Ionosphère.	SILBER	T Electronique
BOURREAU	Botanique.	UEBERSFELD	T Théories Physiques.
CURIE D.	Physique (M.G.P.).	YVON	

Secrétaire Général R. POUILLAIN

A la mémoire de

R. DUQUENNE

A ma femme, à mes parents.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41550205_0034

Qu'il me soit permis d'exprimer ici ma profonde gratitude à M. L. MALAVARD, Professeur à la Faculté des Sciences de Paris, pour l'attention bienveillante qu'il a accordée à mon travail et aussi pour les précieux conseils qu'il a bien voulu me prodiguer.

Que M. M. ENSELME, Chef du Laboratoire d'Analogies Electriques de l'O.N.E.R.A., dont l'aide complaisante et efficace m'a été d'un précieux concours, soit assuré ici de ma vive reconnaissance.

Je tiens également à remercier M. C. FEUILLET pour son sérieux dévouement et son travail soigné (notamment dans le tracé des champs d'équipotentiellles et des réseaux de trajectoires), ainsi que M. A. GUILLOIS pour sa participation intéressante dans le domaine électrique.

Et j'adresse aussi mes remerciements à tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué si sympathiquement à la réalisation de cette étude.

- TABLE DES MATIERES -

	Page
<u>NOTATIONS</u>	1
<u>INTRODUCTION</u>	4
<u>CHAPITRE I</u> - Equations locales des champs stationnaires et leur application.....	9
1.1 - Equations locales des champs stationnaires.....	10
1.2 - Equation différentielle des trajectoires.....	11
1.3 - Résolution analogique de l'équation de Poisson.....	13
1.3.1 - Relations aux différences finies.....	13
1.3.2 - Réseaux électriques.....	14
1.4 - Résolution de l'équation différentielle des trajectoires sur calculatrices arithmétiques.....	16
1.5 - Calcul de la charge d'espace.....	19
1.6 - Méthode itérative de résolution.....	21
 <u>CHAPITRE II</u> - Conditions aux limites.....	 23
2.1 - Conditions aux limites physiques.....	24
2.1.1 - sur le potentiel électrique.....	24
2.1.2 - sur la vitesse initiale des particules électriques....	25
2.1.2.1 - Vitesse U_0 nulle.....	26
2.1.2.2 - Vitesse U_0 non nulle.....	28
2.1.3 - Influence de la forme de l'émetteur sur le calcul de la charge d'espace.....	29
2.1.3.1 - Emetteur sphérique.....	29
2.1.3.1.1 - Vitesse initiale nulle.....	30
2.1.3.1.2 - Vitesse initiale non nulle.....	31
2.1.3.2 - Emetteur plan.....	32
2.2 - Représentation analogique des conditions aux limites.....	32
2.2.1 - Problème de Dirichlet.....	33
2.2.2 - Problème de Neumann.....	36

	Page
2.2.2.1 - Cas du problème unidimensionnel.....	36
2.2.2.2 - Cas du problème de révolution.....	37
<u>CHAPITRE III</u> - Résolution analogique.....	39
3.1 - Le réseau électrique.....	40
3.2 - Découpage du domaine.....	40
3.3 - Alimentation électrique du réseau.....	42
3.4 - Injection de courant : méthode des grandes résistances....	43
<u>CHAPITRE IV</u> - Application au problème tridimensionnel à symétrie axiale.....	47
4.1 - Vérification de la méthode sur le cas théorique de la diode plane.....	48
4.1.1 - Etude théorique.....	48
4.1.2 - Résolution de l'équation de Poisson au réseau élec- trique.....	49
4.1.3 - Méthodes de résolution.....	51
4.1.3.1 - Première méthode.....	52
4.1.3.2 - Seconde méthode.....	54
4.1.3.3 - Troisième méthode	56
4.2 - Application des différentes méthodes au problème de révo- lution.....	58
4.2.1 - Champ Laplacien.....	59
4.2.2 - Champ Poissonnien.....	59
4.2.2.1 - Première méthode.....	60
4.2.2.2 - Seconde méthode.....	62
4.2.2.3 - Troisième méthode	63
<u>CHAPITRE V</u> - Estimation des erreurs.....	66
5.1 - Erreurs liées au réseau.....	67
5.1.1 - Erreurs de découpage.....	67
5.1.2 - Erreurs de limitation matérielle.....	71
5.1.3 - Erreurs électriques.....	72
5.1.4 - Erreurs de quantification.....	72

	Page
5.2. - Erreurs dues aux calculs sur machines arithmétiques..	73
5.3. - Erreurs introduites par la méthode de calcul de la charge d'espace	76
<u>CONCLUSION</u>	80
<u>ANNEXE I</u>	82
<u>ANNEXE II</u>	88
Références bibliographiques	92
Tableaux de I à XIV	96
Champ I	106
Champ II	107
Planches de I à IV ₁₉	108
Figures de 1 à 53	133



Dans un propulseur ionique la détermination des trajectoires des particules issues de l'électrode émettrice est nécessaire pour définir les performances et apporter les modifications éventuelles à la disposition relative des électrodes. Pour résoudre ce problème, une méthode de calcul itératif associant calcul analogique et calcul arithmétique est présentée : le potentiel électrique à l'intérieur du propulseur est simulé par la tension d'un réseau de résistances dont les éléments et les conditions aux limites sont ajustés tandis que les trajectoires et la charge d'espace sont définies à partir de la répartition de potentiel à l'aide d'une machine numérique.

Après avoir vérifié le principe de la méthode sur un exemple calculable analytiquement une forme particulière de propulseur à symétrie axiale est traitée.

THE ASSOCIATION ELECTRICAL NETWORK-DIGITAL COMPUTERS
FOR THE DETERMINATION OF ELECTRON TRAJECTORIES
APPLICATION TO IONIC PROPULSION

, In an ionic propulsor it is necessary to determine the trajectories of the particles from the emission electrode to define the efficiency and to modify, if necessary, the relative configuration of the electrodes. For this, an iterative method associating analog and digital computers is presented : the electrical potential inside the propulsor is simulated by the voltage of ^aresistance network whose boundary conditions and elements are adjusted, while the trajectories and the space charges are defined from the potential distribution by means of a digital computer.

The principle of the method is checked with an example analytically computable and then a particular form of axially symmetrical propulsor is treated.

- NOTATIONS -

1 - GEOMETRIE DU PROPULSEUR ELECTROSTATIQUE :

- r, θ, z coordonnées cylindriques.
 R rayon de l'émetteur sphérique.
 d distance émetteur-électrode accélératrice.
 h_0 hauteur d'un segment sphérique.

2 - GRANDEURS CINEMATIQUES :

- $\vec{U}$ vitesse de la particule électrique.
 u, v, w composantes de $\vec{U}$
 $\vec{\gamma}$ accélération de la particule électrique.
 t temps.
 λ constante (théorème des forces vives).
 $r' = \frac{dr}{dz}$
 $r'' = \frac{d^2r}{dz^2}$
 U_0 vitesse initiale de la particule électrique.
 r_0, z_0 coordonnées initiales d'une trajectoire.
 r'_0 pente initiale d'une trajectoire.
 $\alpha = \sqrt{\frac{2e}{m} V_s}$ vitesse maximale d'une particule électrique.

3 - GRANDEURS ELECTRIQUES :

- V potentiel électrique.
 ρ charge d'espace.
 ϵ_0 permittivité absolue du vide.
 $\vec{E}$ champ électrique.
 $\vec{E}'$ champ électrique induit par la charge d'espace.
 $\vec{D}$ induction électrostatique.
 V_s potentiel accélérateur.
 m masse de la particule électrique.
 q charge de la particule électrique.
 e charge élémentaire d'un électron.

.../...

j_o	densité d'émission ionique en A/m ² .
j_s	densité d'émission à saturation.
χ	densité superficielle d'émission ou nombre de particules émises par seconde et par unité de surface.

4 - GRANDEURS ANALOGIQUES :

Φ	potentiel analogique. ("Champ analogique")
k	coefficient analogique défini par $\Phi = kV$.
$\varphi = \Phi_P - \Phi_L$	potentiel analogique créé par la charge d'espace.
$\frac{\alpha \rho}{j_o}$	charge d'espace réduite.
E, E'	électrodes.
C	conductances électriques.
$v = -k\lambda$	constante.
$\Delta r, \Delta z$	pas du découpage suivant les axes r et z .
i_o	intensité injectée en un noeud du réseau.
R^*, R_j, R_n	résistances électriques.
R^*	résistance variable.
R_v	résistance vraie.
i_p, i_L, i_φ	intensité débitée par l'électrode émettrice.

5 - INDICES :

e, f, a	grandeurs liées aux électrodes émettrice , focalisatrice et accélératrice .
O	relatif à un noeud du réseau.
L, P	grandeurs solutions des équations de LAPLACE et de POISSON.
i, j, ℓ	indices de position et de sommation.
g	grandeurs se rapportant à une grille.

6 - DIVERS :

(γ)	volume.
$(\Sigma), (S)$	surface.
$d\tau, d\sigma$	éléments de volume, de surface.
$x, y; X, Y$	coordonnées auxiliaires.
ξ, η, ζ	coordonnées auxiliaires.
$\vec{n}$	vecteur normal à une surface.
$\vec{t}$	vecteur tangent à une courbe.
δ	épaisseur du faisceau.
Δ	accroissement.
Δ	opérateur LAPLACIEN.
T	température absolue.
Log	logarithme népérien.
$\log$	logarithme décimal.
I	intensité.
$r_0, r_1, r_2, \rho_1^*, \rho_2^*$	rayons.
(r)	frontière d'un domaine.
R_0	erreur introduite par la méthode des différences finies.
$E\%, \epsilon\%$	erreurs partielle, totale.

I N T R O D U C T I O N

L'optique électronique et ses applications techniques entraînent l'étude du mouvement d'un faisceau d'électrons dans un champ électrique produit par des électrodes portées à des potentiels donnés. Le problème se divise en deux parties : connaître d'abord la répartition du potentiel V puis déterminer les trajectoires électroniques dans le champ électrostatique ainsi défini.

Dans certains cas, la fonction V peut être obtenue par l'emploi de la géométrie conforme ou de méthodes s'appuyant sur certains développements en série [19] , [20] , [21] , [22] , mais en général, le problème ne peut être résolu directement. On utilise alors, pour déterminer la carte des potentiels, des méthodes approchées numériques [23] , [24] , [25] , graphiques [26] ou plus généralement des procédés analogiques dont le plus pratique, et probablement le plus précis, nécessite une cuve électrolytique.

Dans un électrolyte, et pour un régime permanent, le potentiel V vérifie l'équation de LAPLACE $\Delta V = 0$. Il en est de même à l'intérieur d'un tube à vide si l'on peut négliger la charge d'espace. Ce rapprochement et les propriétés de l'équation de LAPLACE furent utilisés pour étudier sur un modèle agrandi, à la cuve électrolytique, la distribution de potentiel qui s'établit dans un tube à vide. Malheureusement, dans beaucoup de cas intéressants, cette méthode ne constitue qu'une première approximation très grossière, en particulier au voisinage d'une cathode fonctionnant en régime de charge d'espace.

Pour des structures de révolution et, dans le cas où les électrons se déplacent à proximité de l'axe, leur vitesse faisant un angle infiniment petit avec lui (approximation de GAUSS de l'optique), on détermine aisément les trajectoires électroniques par le calcul à partir de la répartition du potentiel V . Divers auteurs [27], [28] ont mis au point des machines compliquées permettant de tracer automatiquement les trajectoires avec une bonne précision. D'autres, plus récemment, [1], [5] ont conçu des appareils plus simples donnant également des résultats satisfaisants. Les méthodes graphiques, rappelées par MUSSON-GENON [1], sont toutefois en défaut lorsque la vitesse initiale des corpuscules électriques est nulle.

Les interactions électrostatiques qui existent entre les particules chargées d'un faisceau agissent sur la répartition du potentiel et, partant, sur la forme des trajectoires électroniques. La distribution du potentiel V dans le domaine occupé par le faisceau est alors régie par l'équation de POISSON $\Delta V = - \rho / \epsilon_0$.

Une étude faite par le C.N.E.T. [2] développe une intéressante méthode de résolution de l'équation de POISSON. On obtient par des intégrales le potentiel et le champ électrique créés, en un point donné P , par les charges placées en un point M ou contenues dans une tranche du faisceau limitée par une courbe Γ . Le procédé, semi analogique, nécessite la détermination, à la cuve électrolytique, du champ électrique E_L sur la cathode. Les calculs paraissent longs et délicats pour des formes simples d'électrodes, ce qui n'incite guère à les généraliser à des formes plus complexes.

R. FOX [3] utilise, pour l'étude des tubes à vide de révolution, un papier conducteur dont la résistance est uniforme dans une direction et inversement proportionnelle à la distance dans la direction orthogonale. L'injection directe, dans le papier, des intensités représentant la charge d'espace accroît, vraisemblablement, l'imprécision de la méthode qui peut servir surtout à dégrossir le problème.

G.R. BREWER, J.E. ETTER, J.R. ANDERSON [4] ont mis au point un ensemble complexe qui, à partir des informations recueillies dans un bassin rhéoelectrique, trace automatiquement les trajectoires et calcule la charge d'espace. Celle-ci est simulée, directement dans la cuve à fond plan, par une injection de courants électriques. Ce procédé pose de délicats problèmes techniques non encore résolus en France aujourd'hui, semble-t-il.

R. MUSSON-GENON [1] propose une élégante méthode de résolution de l'équation de POISSON, en utilisant un fond de cuve convenablement modelé et en opérant également par approximations successives (la charge d'espace ρ étant reliée à la hauteur d'électrolyte). Toutefois cette méthode nécessite un modelage onéreux et délicat de fonds de cuve à chaque approximation tout en présentant des difficultés sérieuses au voisinage de l'électrode émettrice

La résolution de l'équation de POISSON à l'aide d'un réseau résistif peut s'effectuer de deux manières : traiter directement l'expression $\Delta V + \rho/\epsilon_0 = 0$ en modifiant, à chaque approximation, les valeurs des résistances afin de tenir compte de la charge d'espace (ce qui s'assimile à une modification de la hauteur d'électrolyte dans un bassin), ou bien étudier l'équation $\Delta V = -\rho/\epsilon_0$, le premier membre étant représenté (une fois pour toutes) par des résistances fixes, le second membre étant simulé par une injection de courant en chaque noeud intérieur au faisceau électronique. C'est cette dernière solution que nous avons adoptée.

Dans une première phase, une approximation du "Poissonien" est obtenue en négligeant la charge d'espace ($\rho = 0$) ; dans une seconde phase, on utilise les lectures du potentiel effectuées sur le réseau pour calculer à la machine arithmétique les trajectoires et la charge d'espace correspondantes.

Les résultats obtenus permettent de définir une nouvelle approximation du Poissonien et d'aborder la seconde itération et ainsi de suite jusqu'à convergence.

La méthode de calcul décrite dans la présente publication est appliquée ensuite à la propulsion ionique. Celle-ci [29] , basée sur l'accélération électrostatique de particules chargées électriquement nécessite :

- des générateurs de puissance
- des sources d'ions, chacune d'elles étant constituée par une alimentation en propergol et un dispositif ionisant,
- des systèmes d'électrodes motrices comprenant généralement des électrodes de focalisation, d'accélération et de décélération,
- des canons à électrons destinés à réaliser la neutralisation des faisceaux.

L'étude réalisée au réseau électrique suppose expressément la perfection de l'ionisation. Cette perfection doit être réalisée en pratique [3] , [4] , [30] , [31] sinon la présence d'atomes non ionisés entraînerait des risques de collision avec les ions et, par conséquent, un dérèglement du fonctionnement du moteur.

En rencontrant l'électrode d'accélération, les ions provoquent une érosion qu'il faut minimiser autant que possible. La focalisation du faisceau doit donc être très précise afin que le temps de fonctionnement du moteur soit au moins de l'ordre de plusieurs jours sinon de plusieurs mois.

Si le faisceau de particules éjecté par l'astronef n'est pas électriquement neutre, le propulseur se charge négativement (puisque'il cède des particules positives) jusqu'à ce que son potentiel empêche le départ de nouveaux ions. Pour neutraliser le faisceau il suffit d'injecter des électrons à l'aval de l'électrode accélératrice, le champ de charge d'espace attirant les électrons à l'intérieur du faisceau d'ions. Pour interdire la remontée des électrons vers la source de particules positives, il suffit de placer une électrode dite de décélération. En première approximation nous négligerons l'influence de cette neutralisation, en admettant qu'elle n'agit pratiquement pas sur la forme des trajectoires au voisinage de l'émetteur.

Dans la première partie, les équations régissant le problème physique sont rappelées avant l'exposé de la méthode de résolution analogique. L'équation différentielle des trajectoires est résolue, à l'aide des calculatrices arithmétiques Gamma AET par la méthode d'intégration du quatrième ordre de RUNGE-KUTTA. La transformation de l'intégrale triple $\int_V \text{div}(\rho \vec{U}) = 0$ en une inté-

grale de surface permet de calculer la charge d'espace, de proche en proche, en considérant des tubes de courant élémentaires formés par des trajectoires du faisceau.

Le second chapitre traite des conditions aux limites électriques et cinématiques ainsi que de leur représentation au réseau électrique et sur calculatrices arithmétiques.

La troisième partie est consacrée à la réalisation analogique. Le réseau est composé de plusieurs panneaux isolants, aisément connectables entre eux et comportant chacun dix rangées de vingt noeuds. Le domaine d'étude comprend environ sept cents noeuds. La résistance électrique, logée dans la fiche d'une prise de courant, est placée entre deux noeuds successifs. L'alimentation électrique du réseau s'effectue par courant continu, l'expérience ayant montré que les grandes résistances, utilisées pour l'injection des courants électriques simulant la charge d'espace, créent des déphasages importants lors de l'utilisation du courant alternatif.

Avant d'envisager, dans le chapitre IV, l'application de la méthode sur le cas tridimensionnel à symétrie axiale, le problème de la diode plane est traité initialement afin d'éprouver la rapidité de convergence du processus d'itération. Plusieurs méthodes sont mises au point afin d'obtenir la répartition du potentiel correspondant à une émission saturée ainsi que la valeur de la densité d'émission qui en résulte.

L'estimation des erreurs dans le dernier chapitre montre que si certaines d'entre elles sont susceptibles d'être chiffrées, il en est d'autres, par contre, particulièrement difficiles à évaluer.

CHAPITRE I

EQUATIONS LOCALES DES CHAMPS STATIONNAIRES
ET LEUR APPLICATION

1.1 - Equations locales des champs stationnaires :

Pour une distribution continue de charges électriques, de densité volumique ρ , l'équation de continuité classique s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{U}) = 0 \quad (1)$$

$\vec{U}$ désignant le vecteur vitesse des particules contenues dans l'élément de volume $d\tau$.

Le champ électrique étant stationnaire, l'équation (1) se réduit à :

$$\boxed{\operatorname{div}(\rho \vec{U}) = 0} \quad (2)$$

soit $M(\xi, \eta, \zeta)$ un point du volume $(\mathcal{V})$. La charge du volume $d\tau$ étant $\rho d\tau$, le champ électrique $\vec{E}$ en un point $N(x, y, z)$ est :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{(\mathcal{V})} \rho \frac{\vec{\ell}}{\ell^3} d\tau = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{(\mathcal{V})} \rho \operatorname{grad}_N \left(\frac{1}{\ell} \right) d\tau \quad (3)$$

si $\vec{\ell} = \vec{MN}$

Le champ électrique dérive d'un potentiel, comme tout champ de forces centrales.

$$\vec{E} = - \operatorname{grad} V = - \vec{\nabla} V \quad (4)$$

Le potentiel électrique s'exprime par l'intégrale :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{(\mathcal{V})} \frac{\rho}{\ell} d\tau \quad (5)$$

En introduisant le vecteur induction électrostatique $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ il vient, compte tenu de l'expression (3) :

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad (6)$$

.../...

La transformation de l'équation (6), compte tenu de la relation (4), permet d'aboutir à l'équation de POISSON :

$$\Delta V = - \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (7)$$

Le propulseur électrostatique étant de révolution autour de l'axe OZ , les coordonnées cylindriques (r, θ, z) sont adoptées dans tous les calculs afin de profiter de la symétrie.

La charge d'espace exerce une double action :

1° - Elle crée un champ électrique radial centrifuge E'_r qui augmente l'angle d'ouverture du faisceau (fig. 1).

Pour lutter contre cette divergence il faut utiliser une troisième électrode désignée sous le terme de "focalisatrice" et dont le diaphragme d'entrée doit être assez grand pour laisser passer le faisceau.

2° - Elle crée un champ axial E'_z opposé au champ accélérateur et qui a pour effet de limiter la densité de courant que peut transporter le faisceau.

Ces deux effets se combinent pour donner naissance à un potentiel $V_P - V_L$ dû à la charge d'espace, satisfaisant également à l'équation de POISSON puisque $\Delta V_L = 0$

1.2 - Equation différentielle des trajectoires :

L'équation fondamentale de la dynamique appliquée aux particules électriques de masse m , de charge q , soumises au champ accélérateur $\vec{E}$ s'écrit :

$$m \vec{\gamma} = q \vec{E} = - q \overrightarrow{\text{grad}} V \quad (8) \quad \dots/\dots$$

en négligeant les forces massiques.

Soient u, v, w , les composantes de la vitesse $\vec{U}$ en coordonnées cylindriques :

$$\gamma_r = \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{U} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} u$$

Le champ $\vec{E}$ étant stationnaire et compte tenu de la symétrie axiale, des simplifications notables s'introduisent :

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = 0 \quad ; \quad v = 0$$

D'où :

$$(9) \quad \begin{cases} m \left(u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -q \frac{\partial V}{\partial r} \\ 0 = \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ m \left(u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -q \frac{\partial V}{\partial z} \end{cases}$$

Posons :

$$\begin{cases} r' = \frac{dr}{dz} \\ r'' = \frac{d^2 r}{dz^2} \end{cases}$$

Comme

$$u = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} = r' w$$

Il vient :

$$\begin{cases} m \left(r'^2 w \frac{\partial w}{\partial r} + w^2 r'' + w r' \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -q \frac{\partial V}{\partial r} \\ m \left(w r' \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -q \frac{\partial V}{\partial z} \end{cases}$$

Soit :

$$m w^2 r'' = -q \left(\frac{\partial V}{\partial r} - r' \frac{\partial V}{\partial z} \right)$$

Le théorème des forces vives permet d'écrire :

$$\frac{1}{2} m U^2 = -q V + \text{constante.} \quad (10)$$

Cette dernière équation s'obtient également à partir des équations (9) [6].

.../...

Donc : $m (1+r'^2) w^2 = -2qV + 2\lambda q$ (10)'

$2\lambda q$ désignant une constante.

L'équation différentielle des trajectoires s'exprime finalement par :

$$r'' = \frac{(1+r'^2) \left(\frac{\partial V}{\partial r} - r' \frac{\partial V}{\partial z} \right)}{2(V-\lambda)} \quad (11)$$

Le but recherché étant la résolution de l'équation de POISSON, dans le cas le plus général, cette étude se propose de donner une méthode de calcul analogique en tenant compte de toutes les caractéristiques de l'ensemble (formes extérieures des électrodes, géométrie du propulseur, conditions initiales sur les particules émises, potentiels imposés sur les électrodes).

1.3 - Résolution analogique de l'équation de POISSON :

L'équation (7) s'écrit à l'aide des coordonnées cylindriques :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = - \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (7)'$$

le terme $\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}$ disparaissant du fait de la symétrie.

Avant d'envisager la représentation analogique de cette équation aux dérivées partielles par un réseau de résistances, il est nécessaire de la remplacer par une relation aux différences finies.

1.3.1. - Relations aux différences finies :

Soit dans le plan méridien un quadrillage quelconque (fig. 2) dont les côtés sont parallèles à l'axe des r et à l'axe des z . A tout point d'intersection de deux droites formant le quadrillage correspond un "noeud".

.../...

Considérons donc un noeud 0, auquel sera attribué l'indice zéro, et la "croix" qu'il constitue avec les quatre noeuds (1,2,3,4,) qui l'entourent. Soient V_0, V_1, V_2, V_3, V_4 les valeurs respectives de la fonction $V(r,z)$ en chacun de ces points et $\Delta z_1, \Delta r_2, \Delta z_3, \Delta r_4$, les distances séparant le noeud central de ses voisins immédiats (distances très petites par rapport à l'unité de longueur).

De la formule de TAYLOR découlent les relations suivantes appelées "relations aux différences finies" :

$$(12) \left\{ \begin{array}{l} V_1 - V_0 = \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)_0 \Delta z_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right)_0 \Delta z_1^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 V}{\partial z^3} \right)_0 \Delta z_1^3 + \frac{1}{24} \left(\frac{\partial^4 V}{\partial z^4} \right)_0 \Delta z_1^4 + \dots \\ V_2 - V_0 = \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)_0 \Delta r_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \right)_0 \Delta r_2^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 V}{\partial r^3} \right)_0 \Delta r_2^3 + \frac{1}{24} \left(\frac{\partial^4 V}{\partial r^4} \right)_0 \Delta r_2^4 + \dots \\ V_3 - V_0 = - \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)_0 \Delta z_3 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right)_0 \Delta z_3^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 V}{\partial z^3} \right)_0 \Delta z_3^3 + \frac{1}{24} \left(\frac{\partial^4 V}{\partial z^4} \right)_0 \Delta z_3^4 + \dots \\ V_4 - V_0 = - \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)_0 \Delta r_4 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \right)_0 \Delta r_4^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 V}{\partial r^3} \right)_0 \Delta r_4^3 + \frac{1}{24} \left(\frac{\partial^4 V}{\partial r^4} \right)_0 \Delta r_4^4 + \dots \end{array} \right.$$

D'où il vient :

$$(12)' \quad r \Delta r^2 \left(\Delta V \right)_0 = r \frac{\Delta r^2}{\Delta z^2} \left\{ (V_1 - V_0) + (V_3 - V_0) \right\} + \left(r + \frac{\Delta r}{2} \right) (V_2 - V_0) + \left(r - \frac{\Delta r}{2} \right) (V_4 - V_0)$$

en se limitant aux termes du second ordre et en adoptant un maillage régulier de pas Δr et Δz .

Il apparaît ainsi que le second membre de l'équation (12)' peut être représenté par un réseau de résistances pures.

1.3.2.- Réseaux électriques : Considérons, en effet, un réseau électrique formé de conductances C_1, C_2, C_3 et C_4 disposées suivant le quadrillage précédent (fig.3).

La Loi de KIRCHHOFF sur les intensités :

$$\sum_{j=0}^{j=4} i_j = 0 \quad (13)$$

(l'intensité i_0 étant injectée dans le réseau au noeud 0) peut se transformer suivant :

$$\sum_{j=1}^{j=4} C_j (\Phi_j - \Phi_0) + i_0 = 0$$

Φ désignant la fonction potentiel analogique traitée au réseau. En développant en série de TAYLOR et en se limitant aux termes du second ordre, il vient :

$$i_0 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_0 (c_1 \Delta z_1 - c_3 \Delta z_3) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)_0 (c_2 \Delta r_2 - c_4 \Delta r_4) \quad (14)$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right)_0 \left(\frac{c_1 \Delta z_1^2 + c_3 \Delta z_3^2}{2}\right) + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}\right)_0 \left(\frac{c_2 \Delta r_2^2 + c_4 \Delta r_4^2}{2}\right) = 0$$

Adoptons un maillage régulier suivant les deux axes :

$$\Delta z_1 = \Delta z_3 = \Delta z$$

$$\Delta r_2 = \Delta r_4 = \Delta r$$

L'identité des équations (7)' et (14) exige que :

$$c_1 = c_3 \quad \Phi = kV$$

$$\frac{\Delta r^2}{2} (c_2 + c_4) = r \Delta r (c_2 - c_4) = \frac{\Delta z^2}{2} (c_1 + c_3) = \frac{i_0 \epsilon_0}{k\rho} \quad (15)$$

Posons :

$$c_1 = c_3 = c_z$$

$$c_4 = c_r - \frac{\Delta c_r}{2}$$

$$c_2 = c_r + \frac{\Delta c_r}{2}$$

La résolution du système d'équations (15) conduit aux résultats suivants :

$$\frac{\Delta c_r}{c_r} = \frac{\Delta r}{r} \longrightarrow \boxed{c_r = \beta r} \quad (16)$$

$$c_z = c_r \frac{\Delta r^2}{\Delta z^2} \longrightarrow \boxed{c_z = \beta r \frac{\Delta r^2}{\Delta z^2}} \quad (17)$$

$$\boxed{i_0 = \frac{k\rho c_z \Delta z^2}{\epsilon_0}} \quad (18)$$

La méthode des différences finies appliquée au réseau électrique apporte les conclusions suivantes :

- Les conductances C_r varient linéairement avec la distance r ,
- Les conductances C_z sont constantes le long d'une parallèle à l'axe du propulseur électrostatique.
- L'intensité i_0 est proportionnelle à la charge d'espace sur une ligne $r = \text{constante}$. ./...

L'analogie électrique directe entre le potentiel V du champ physique et le potentiel Φ obtenu au réseau se traduit par :

$$\Phi = kV \quad (19)$$

la constante k dépendant, d'une façon générale, des potentiels imposés sur les électrodes et de l'échelle des mesures. Les intensités électriques injectées dans le réseau sont donc égales à

$$\frac{k \rho C_z \Delta z^2}{\epsilon_0}$$

L'examen des formules (16) et (17) montre que les résistances deviennent infinies près de l'axe. Une difficulté particulière se présente donc; pour la vaincre, certains auteurs préconisent la méthode du réseau diagonal [7]. Nous avons préféré adopter la méthode des "résistances vraies" associée à celle du "cylindre creux" [annexe I].

L'intensité injectée dans le réseau, en chaque noeud, est fonction de la densité de charge locale ρ . Le calcul de celle-ci (cf. paragraphe 1.5) nécessite la connaissance des trajectoires des particules électriques.

1.4 - Résolution de l'équation différentielle des trajectoires sur calculatrices arithmétiques :

L'équation différentielle mise sous la forme :

$$r'' = \frac{(1+r'^2) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} - r' \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)}{2(\Phi + V)} \quad (20)$$

peut être résolue, à l'aide des calculatrices arithmétiques, par la méthode d'intégration du quatrième ordre de RUNGE-KUTTA [9] - [10].

Auparavant, à partir de la carte des potentiels Φ obtenus au réseau électrique, il faut calculer les dérivées partielles $\frac{\partial \Phi}{\partial r}$ et $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$. Ce calcul s'effectue par une méthode d'interpolation parabolique dont voici un bref rappel pour la compréhension de la suite de cet exposé.

Soient trois points d'abscisses X_{i-1}, X_i, X_{i+1} , où une fonction Y prend respectivement les valeurs Y_{i-1}, Y_i, Y_{i+1} . Les valeurs y_i de la fonction en un point d'abscisse x_i situé dans l'intervalle AB, A et B étant les milieux respectifs de $X_{i-1} X_i$ et $X_i X_{i+1}$ (fig. 4), ainsi que de sa dérivée $\left(\frac{\partial Y}{\partial X}\right)_{x_i}$ s'obtiennent par les formules de l'interpolation parabolique :

$$y_i = \frac{(x_i - X_i)(x_i - X_{i+1})}{(X_{i-1} - X_i)(X_{i-1} - X_{i+1})} Y_{i-1} + \frac{(x_i - X_{i+1})(x_i - X_{i-1})}{(X_i - X_{i+1})(X_i - X_{i-1})} Y_i + \frac{(x_i - X_{i-1})(x_i - X_i)}{(X_{i+1} - X_{i-1})(X_{i+1} - X_i)} Y_{i+1} \quad (21)$$

et en dérivant par rapport à x_i

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial X}\right)_{x_i} = \frac{\partial y_i}{\partial x_i} = \frac{2x_i - (X_i + X_{i+1})}{(X_{i-1} - X_i)(X_{i-1} - X_{i+1})} Y_{i-1} + \frac{2x_i - (X_{i+1} + X_{i-1})}{(X_i - X_{i+1})(X_i - X_{i-1})} Y_i + \frac{2x_i - (X_{i-1} + X_i)}{(X_{i+1} - X_{i-1})(X_{i+1} - X_i)} Y_{i+1} \quad (22)$$

La formule (21) représente l'équation d'une parabole passant par les trois points $(X_{i-1}, Y_{i-1}), (X_i, Y_i), (X_{i+1}, Y_{i+1})$. Il est à noter d'ailleurs que l'interpolation parabolique donne un résultat erroné dans le cas où le sommet de la conique (21) se trouve précisément dans l'intervalle $X_{i-1} X_i$ auquel appartient x_i (fig. 4); cette conjoncture défavorable a d'autant moins de chances de se présenter que les intervalles sont plus petits.

.../...

Considérons dans le plan méridien (Z, R) , un quadrillage formant quatre rectangles aux sommets desquels la fonction Φ , représentant le potentiel électrique analogique, prend les neuf valeurs $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_9$ (fig. 5). Les centres de ces rectangles définissent un autre quadrilatère ABCD.

Soit un point de coordonnées (z_i, r_j) situé à l'intérieur du rectangle ABCD et soit à déterminer en ce point :

$$\begin{aligned} \Phi(z_i, r_j) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial R}(z_i, r_j) & \quad \text{dérivée suivant l'axe R.} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial Z}(z_i, r_j) & \quad \text{dérivée suivant l'axe Z.} \end{aligned}$$

En application directe des formules d'interpolation parabolique, la marche à suivre obéit au processus suivant :

- Calcul de $\Phi(H), \Phi(I), \Phi(J), \Phi(E), \Phi(F), \Phi(G)$

à l'aide de l'équation (21), à partir des valeurs du champ en trois points situés respectivement sur les axes

$$R_{j-1}, R_j, R_{j+1}, Z_{i-1}, Z_i \text{ et } Z_{i+1}$$

- Calcul de $\Phi(z_i, r_j)$ par application de la même formule sur les trois valeurs $\Phi(H), \Phi(I), \Phi(J)$. Ce choix des points H, I, J est d'ailleurs arbitraire : E, F et G fourniraient une valeur de $\Phi(z_i, r_j)$ tout aussi acceptable.

- Calcul de $\frac{\partial \Phi}{\partial R}(z_i, r_j)$ et de $\frac{\partial \Phi}{\partial Z}(z_i, r_j)$ à l'aide de l'équation (22) et, respectivement, des valeurs $\Phi(H), \Phi(I), \Phi(J)$ et $\Phi(E), \Phi(F), \Phi(G)$.

.../...

Les conditions initiales d'une trajectoire, à savoir la pente r'_0 et les coordonnées s_0, r_0 du point de départ M_0 étant connues, il est possible de calculer r''_0 à partir de la formule (20) compte tenu des résultats fournis par l'interpolation parabolique effectuée sur les valeurs du champ $\vec{\Phi}$ prises en neuf points encadrant M_0 . La méthode d'intégration de RUNGE-KUTTA permet alors d'obtenir les valeurs r' et r'' de proche en proche :

- Au point $s_0 + \Delta z$ connaissant celles au point s_0 .
 - Au point $s_0 + 2\Delta z$ connaissant celles au point $s_0 + \Delta z$.
-

1.5 - Calcul de la charge d'espace :

La recherche des trajectoires (électroniques ou ioniques) à partir de la configuration du champ électrique étant effectuée, la densité de charge locale ρ doit satisfaire en tout point du champ à l'équation de continuité (2). (En dehors du faisceau de particules nous avons par conséquent $\rho = 0$).

Soient trois trajectoires 1, 2, 3, assez voisines (Fig.6).

Considérons le volume annulaire ($\mathcal{V}$) délimité par les trajectoires extrêmes 1 et 3 et par les plans $s = s_1$ et $s = s_1 + 1$.

Pour un tube de courant, la formule de GREEN s'écrit :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} (\rho \vec{U}) d\tau = \iint_{\Sigma} \rho \vec{U} \cdot \vec{n} d\sigma$$

$\vec{n}$ désignant la normale extérieure à la surface (Σ) limitant le domaine ($\mathcal{V}$).

Compte tenu de la relation (2) il vient :

$$\iint_{\Sigma} \rho \vec{U} \cdot \vec{n} d\sigma = 0 \quad (23)$$

Sur la surface latérale du tube de courant le vecteur vitesse $\vec{U}$ est normal à $\vec{n}$. La contribution de cette frontière s'avère donc nulle.

.../...

Soient P_j et P_ℓ deux points appartenant aux surfaces extrêmes (planes) Σ_i et Σ_{i+1} . L'équation (23) se transforme suivant :

$$\iint_{\Sigma_i} \rho(P_j) \vec{U}(P_j) \vec{n}_j d\sigma_j + \iint_{\Sigma_{i+1}} \rho(P_\ell) \vec{U}(P_\ell) \vec{n}_\ell d\sigma_\ell = 0 \quad (23)'$$

M_i et M_{i+1} désignant les points situés sur la trajectoire intermédiaire 2 nous admettrons, en première approximation, que :

- Les champs des vecteurs vitesse $\vec{U}(P_j)$ et $\vec{U}(P_\ell)$ sont représentés, en chaque point des sections Σ_i et Σ_{i+1} , par les champs uniformes $\vec{U}(M_i)$ et $\vec{U}(M_{i+1})$.

- Les champs de charge d'espace locale $\rho(P_j)$ et $\rho(P_\ell)$ sont également remplacés par les champs uniformes $\rho(M_i)$ et $\rho(M_{i+1})$.

L'équation (23)' se simplifie :

$$\rho(M_i) \iint_{\Sigma_i} \vec{U}(M_i) \vec{n}_i d\sigma_j + \rho(M_{i+1}) \iint_{\Sigma_{i+1}} \vec{U}(M_{i+1}) \vec{n}_{i+1} d\sigma_\ell = 0$$

Soit :

$$\rho(M_i) U(M_i) \cos \varepsilon_i \iint_{\Sigma_i} d\sigma_j = \rho(M_{i+1}) U(M_{i+1}) \cos \varepsilon_{i+1} \iint_{\Sigma_{i+1}} d\sigma_\ell$$

$$\text{avec } \cos \varepsilon_i = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 \varepsilon_i}} \text{ et } tg \varepsilon_i = - \left(\frac{dr}{dz} \right)_{M_i}$$

Attribuons les indices i et $i+1$ aux différentes grandeurs attachées aux points M_i et M_{i+1} .

Finalement :

$$\rho_i U_i \frac{1}{\sqrt{1 + r_i'^2}} \iint_{\Sigma_i} d\sigma_j = \rho_{i+1} U_{i+1} \frac{1}{\sqrt{1 + r_{i+1}'^2}} \iint_{\Sigma_{i+1}} d\sigma_\ell$$

avec

$$\iint_{\Sigma_i} d\sigma_j = \pi (r_3^2 - r_1^2)_i$$

.../...

en désignant par r_1 et r_3 les rayons qui correspondent aux trajectoires 1 et 3 et définissent le bord des sections planes (fig. 6).

D'où :

$$\rho_i U_i \frac{(r_3^2 - r_1^2)_i}{\sqrt{1 + r_i'^2}} = \rho_{i+1} U_{i+1} \frac{(r_3^2 - r_1^2)_{i+1}}{\sqrt{1 + r_{i+1}'^2}} \quad (24)$$

L'équation (24) permet de calculer la charge d'espace ρ de proche en proche (cf. chapitre II) compte tenu de la forme de l'émetteur et de la pente initiale des trajectoires. Le calcul, programmé sur IBM 610, permet de diminuer d'une part les temps de résolution et d'autre part les risques d'erreurs manuelles.

1.6 - Méthode itérative de résolution :

La résolution de l'équation de POISSON obéit au processus suivant :

L'électrode émettrice étant imposée, on se donne une forme arbitraire des deux autres (électrodes focalisatrice et accélératrice) a priori inconnues. L'approximation, dite "d'ordre zéro", consiste à déterminer, au réseau électrique, le champ LAPLACIEN satisfaisant à :

$$\Delta V_L = 0 \quad (25)$$

A partir du faisceau de trajectoires correspondant à ce champ LAPLACIEN, le calcul fournit une charge d'espace locale ρ_0 qui, injectée dans le réseau sous forme d'intensité électrique par l'intermédiaire de grandes résistances, donne naissance à un champ POISSONNIEN dit de première approximation tel que :

$$\Delta V_{P_1} = - \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \quad (26)$$

.../...

L'exploitation par les calculatrices arithmétiques de ce second champ conduit à un nouveau réseau de trajectoires à partir duquel une charge d'espace ρ_1 est déterminée. Les approximations successives satisfont aux équations :

$$\Delta V_{P_2} = - \frac{\rho_1}{\epsilon_0} \quad (27)$$

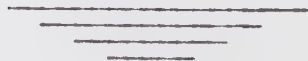
$$\Delta V_{P_3} = - \frac{\rho_2}{\epsilon_0} \quad (28)$$

Chaque cycle d'approximations s'effectue, en général, à densité d'émission j_0 constante (à ce sujet deux méthodes seront proposées ultérieurement, afin de déterminer le potentiel électrique correspondant au cas d'une émission saturée).

Une troisième méthode, plus intéressante, permet de connaître la densité d'émission à saturation, en réglant la valeur du paramètre j_0 , à chaque approximation, de telle sorte que le champ électrique s'annule à la surface de l'émetteur.

La convergence de cette méthode d'itération est assurée à partir de la troisième ou quatrième approximation.

Le but final étant d'obtenir une configuration optiquement correcte, si le choix des formes d'électrodes n'apporte pas une réponse satisfaisante, il faut recommencer le cycle des calculs à partir de nouvelles géométries accélératrice et focalisatrice.



C H A P I T R E I I

CONDITIONS AUX LIMITES

Le potentiel électrique qui vérifie, en tout point du domaine de définition, l'équation de POISSON (7) doit satisfaire sur le contour aux conditions aux limites du problème physique.

2.1 - Conditions aux limites physiques :

2.1.1 - sur le potentiel électrique :

Le champ électrique $\vec{E}$ créé en portant les électrodes émettrice et accélératrice à deux potentiels différents doit accélérer les particules de charge q .

L'analogie directe entre le potentiel physique V et celui Φ relevé au réseau se traduit par la relation linéaire :

$$\Phi = k V \quad (19)$$

Le réseau électrique présente l'avantage de traiter aussi aisément l'un que l'autre, les deux problèmes qui peuvent se rencontrer dans la pratique : le problème électronique et le problème ionique. Dans le premier cas, pour qu'il y ait extraction et accélération vers la sortie du propulseur, il faut, d'après l'équation (8), que le vecteur $\vec{\text{grad}} V$ et partant le vecteur $\vec{\text{grad}} \Phi$ soit dirigé suivant la normale extérieure à l'électrode émettrice (la charge q étant égale à $-e$, e désignant la charge élémentaire d'un électron) tandis que dans le second cas $\vec{\text{grad}} V$ doit être dirigé suivant la normale intérieure (la charge q d'un ion étant égale à $+e$).

Les conditions aux limites respectant le sens de $\vec{\text{grad}} V$ sont donc les suivantes :

.../...

Problème ionique :

$$V_e = V_s \quad \text{sur l'électrode émettrice.}$$

$$V_a = 0 \quad \text{sur l'électrode accélératrice.}$$

V_s désignant le potentiel accélérateur.

Problème électronique :

Il suffit d'inverser les potentiels précédents sur les deux électrodes.

L'électrode focalisatrice, dont le rôle est de concentrer le faisceau de particules vers l'axe du propulseur, est portée à un certain potentiel V_f . Dans les expériences effectuées nous avons toujours adopté $V_e = V_f$ afin de pouvoir sûrement appliquer la méthode d'intégration de RUNGE-KUTTA. Celle-ci, en effet, n'est réalisable que si la dérivée seconde $\frac{d^2r}{dz^2}$ ne devient pas infinie, or cette impossibilité peut se présenter dans deux cas (11) :

$$\frac{dr}{dz} \longrightarrow \text{infini}$$

$$V - \lambda = 0$$

Pour que les ions soient fortement repoussés il suffirait, effectivement, de porter l'électrode focalisatrice à un potentiel supérieur à celui de l'émetteur. Toutefois un risque subsiste, car il existera sûrement, dans le champ, une ligne équipotentielle telle que $V - \lambda = 0$. Si la particule ionique rencontre cette ligne, ou s'en approche suffisamment, la méthode d'intégration s'avèrera inopérante. Afin d'éviter un tel risque, il semble indiqué d'adopter des potentiels égaux sur les électrodes émettrice et focalisatrice.

2.1.2 - Sur la vitesse initiale des particules électriques :

Soit U_0 la vitesse initiale des corpuscules que nous supposons dorénavant être des ions. L'influence de U_0 sur la

.../...

forme des trajectoires, au voisinage de l'émetteur, se traduit par les résultats suivants :

2.1.2.1 - Vitesse U_0 nulle :

Les conditions aux limites à satisfaire pour le potentiel électrique sont :

$$V_e = V_f = V_s$$

$$V_a = 0$$

L'équation (10) donne : $\lambda = V_s$

L'équation différentielle des trajectoires ioniques s'écrit alors :

$$r'' = \frac{(1+r'^2) \left(\frac{\partial V}{\partial r} - r' \frac{\partial V}{\partial z} \right)}{2(V - V_s)} \quad (29)$$

En chaque point M_0 de l'électrode émettrice nous avons précisément $V - V_s = 0$ de sorte que $\frac{d^2r}{dz^2}$ y devient infini.

L'application de la méthode d'intégration de RUNGE-KUTTA sur calculatrices arithmétiques ne peut donc s'effectuer à partir du point M_0 . Toutefois, comme nous allons le voir, l'intégration est possible en utilisant un point M_1 , situé sur la normale extérieure en M_0 à la surface d'émission, comme point initial. En effet, soient $\vec{z}$ et $\vec{n}$ les vecteurs tangent et normal à l'électrode (E), en M_0 (fig. 7) et M_1 un point, de la trajectoire issue de M_0 , très voisin de ce dernier

Une fonction $f(M, t)$ peut se développer, en se limitant aux termes du second ordre, suivant :

$$f(M_1) - f(M_0) = (t_1 - t_0) f'(M_0) + \frac{(t_1 - t_0)^2}{2!} f''(M_0)$$

f' et f'' désignant les dérivées successives par rapport au temps.

Par suite :

$$\overrightarrow{M_0 M_1} = \Delta t \quad \overrightarrow{U_0} + \frac{\Delta t^2}{2} \quad \overrightarrow{\gamma_0} \quad (30)$$

en posant : $\Delta t = t_1 - t_0$;

$\overrightarrow{U_0}$ et $\overrightarrow{\gamma_0}$ représentent respectivement les vecteurs vitesse et accélération des particules ioniques en M_0 .

Or, par définition : $\overrightarrow{U_0} = 0$

Multiplions scalairement les deux membres de (30) par $\overrightarrow{\tau}$.

$$\overrightarrow{\tau} \cdot \overrightarrow{M_0 M_1} = \frac{\Delta t^2}{2} \cdot \overrightarrow{\tau} \cdot \overrightarrow{\gamma_0} \quad (31)$$

L'équation fondamentale de la dynamique (8) donne :

$$m \overrightarrow{\gamma} = - q \overrightarrow{\text{grad}} V$$

Soit :

$$\overrightarrow{\gamma_0} = - \frac{q}{m} (\overrightarrow{\text{grad}} V)_{M_0} \quad (32)$$

D'où :

$$\overrightarrow{\tau} \cdot \overrightarrow{M_0 M_1} = - \frac{q \Delta t^2}{2m} \cdot \overrightarrow{\tau} \cdot (\overrightarrow{\text{grad}} V)_{M_0} \quad (33)$$

La surface émettrice est une équipotentielle; les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $(\overrightarrow{\text{grad}} V)_{M_0}$ sont colinéaires. Par suite :

$$\overrightarrow{\tau} \cdot \overrightarrow{M_0 M_1} = 0 \quad (34)$$

Le point M_1 se situe donc sur la normale $\overrightarrow{n}$.

CONCLUSION :

Les trajectoires ioniques sont orthogonales à la surface émettrice lorsque la vitesse initiale des corpuscules électriques est nulle.

.../...

Cette constatation nous permet d'appliquer la méthode d'intégration de RUNGE-KUTTA à partir de points initiaux M_1 situés sur différentes normales à l'émetteur. La distance $M_0 M_1 = \Delta n$ peut varier de façon notable. Plus elle est petite, plus les trajectoires sont proches de leur position réelle, mais par contre les risques d'erreurs dus à une mauvaise extrapolation parabolique (cf. 2.2.1) augmentent et le pas d'intégration diminue ce qui provoque un temps total d'intégration beaucoup plus important. Il y a donc un compromis à respecter. Les expériences effectuées avec des rapports $\frac{\Delta n}{\Delta r}$ égaux respectivement à 1; 0.5; 0.25; 0.15; 0.10; 0.05 et des coefficients angulaires r'_0 différents montrent dans un cas précis (champ LAPLACIEN) que les trajectoires issues d'un même point constituent une sorte de "queue de cheval", dont l'épaisseur varie dans le même sens que le nombre $\frac{\Delta n}{\Delta r}$. En désignant par δ l'écart (fig. 8), pour une abscisse z donnée, entre une trajectoire de coefficient angulaire quelconque et la trajectoire réelle de la particule ionique, les courbes des planches II₁ et II₂ donnent l'évolution de cette épaisseur en fonction du rapport $\frac{\Delta n}{\Delta r}$; elles montrent, en les extrapolant jusqu'à l'origine, que δ tend effectivement vers zéro, ce qui prouverait que s'il était possible d'appliquer la méthode d'intégration jusque sur l'électrode émettrice et ce, quelle que soit la pente initiale adoptée, les trajectoires obtenues seraient toutes confondues en une seule, celle qui correspond au coefficient angulaire de la normale au point M_0 . Considéré.

2.1.2.2 - Vitesse U_0 non nulle :

Une grille G, portée à un potentiel V_g , crée une "préaccélération" des particules émises. La géométrie de cette grille est homothétique de celle de l'électrode émettrice dans le cas d'une calotte sphérique et translatée dans le cas d'un émetteur plan (fig. 9).

Les particules électriques sont extraites de l'électrode émettrice avec une vitesse nulle. Accélérées dans l'espace compris entre l'émetteur et la grille, elles atteignent celle-ci avec une vitesse uniforme U_0 . Il suffit, dès lors, de traiter au réseau le problème avec trois électrodes : la grille et les électrodes focalisatrice et accélératrice, la grille jouant le rôle d'une source d'ions animés d'une vitesse initiale U_0 .

Les conditions aux limites physiques sont :

$$V_e = V_s ; \quad V_a = 0 ; \quad V_f = V_g ; \quad \text{avec } 0 < V_g < V_s$$

$$U = U_0 \quad \text{sur la grille.}$$

2.1.3 - Influence de la forme de l'émetteur sur le calcul de la charge d'espace :

L'équation :

$$\frac{\rho_i U_i (r_3^2 - r_1^2)_i}{\sqrt{1 + r_i'^2}} = \frac{\rho_{i+1} U_{i+1} (r_3^2 - r_1^2)_{i+1}}{\sqrt{1 + r_{i+1}'^2}} \quad (24)$$

établie dans le premier chapitre (cf. 1.5) permet de calculer la charge d'espace de proche en proche, sur une trajectoire donnée, compte tenu de la forme de l'électrode émettrice^{et} de la position des deux trajectoires voisines (fig. 6).

2.1.3.1 - Emetteur sphérique :

Pour un émetteur en forme de calotte sphérique et en supposant que la densité d'émission ionique est constante et correspond à une densité de courant uniforme j_0 sur l'émetteur ($j_0 = \chi e$, si l'on désigne par χ la densité superficielle d'émission, nombre de particules émises par seconde et par mètre carré)

.../...

nous avons :

$$\frac{\rho_i U_i \pi (r_3^2 - r_1^2)_i}{\sqrt{1 + r_i'^2}} = j_0 \int_E 2\pi r ds \quad (35)$$

les ions étant émis orthogonalement à la frontière (E) (cf. 2.1.2.1.).

L'intégrale $\int_E 2\pi r ds$ représente une aire de révolution. Dans le cas d'un segment sphérique :

$$\int_E 2\pi r ds = 2\pi R h_0 \quad (36)$$

avec : R = rayon de la sphère

$$h_0 = (z_3 - z_1)_e \quad (37)$$

z_{1e} et z_{3e} désignant les abscisses initiales des trajectoires 1 et 3

D'où :

$$\rho_i = \frac{2 R h_0 j_0 \sqrt{1 + r_i'^2}}{(r_3^2 - r_1^2)_i U_i} \quad (38)$$

2.1.3.1.1 - Vitesse initiale nulle :

L'équation (10) s'écrit :

$$\frac{1}{2} m U_i^2 = -e (V_i - V_s)$$

V_s étant le potentiel de l'émetteur.

L'équation (38) devient alors :

$$\rho_i = \frac{2 R h_0 j_0 \sqrt{1 + r_i'^2}}{(r_3^2 - r_1^2)_i \sqrt{\frac{2e}{m} (V_s - V_i)}} \quad (39)$$

.../...

Posons :

$$\alpha = \sqrt{\frac{2e}{m}} V_s \quad (40)$$

Le nombre sans dimension $\alpha \rho_i / j_0$ s'exprime finalement par :

$$\boxed{\frac{\alpha \rho_i}{j_0} = \frac{2 R h_0 \sqrt{\frac{1 + r_i'^2}{1 - \frac{V_i}{V_s}}}}{(r_3^2 - r_1^2)_i}} \quad (41)$$

L'évolution du nombre $\alpha \rho_i / j_0$, charge d'espace réduite, (proportionnel à la charge d'espace) le long d'une trajectoire dépend donc de la pente de celle-ci, de la position des trajectoires voisines, du paramètre $2 R h_0$ lié à la forme géométrique de l'émetteur et au découpage adopté sur celui-ci (nombre total de tubes de courant annulaires utilisés pour le calcul de ρ_i dans tout le domaine), et du rapport $\frac{V_i}{V_s}$ entre le potentiel électrique local V_i et le potentiel accélérateur V_s .

Le paramètre j_0 demeure arbitraire; il est défini sans ambiguïté dans le cas où l'émission est saturée et où le champ électrostatique s'annule à la surface de l'électrode émettrice.

2.1.3.1.2 - Vitesse initiale non nulle :

De la même façon on obtient :

$$\frac{\rho_i}{j_0} = \frac{2 R h_0 \sqrt{\frac{(1 + r_i'^2)}{U_0^2 + \frac{2e}{m} (V_g - V_i)}}}{(r_3^2 - r_1^2)_i} \quad (42)$$

.../...

2.1.3.2 - Emetteur plan :

Un raisonnement identique conduit à :

$$\frac{\rho_i U_i \pi (r_3^2 - r_1^2)_i}{\sqrt{1 + r_i'^2}} = j_0 \int_{\epsilon} 2\pi r dr$$

en supposant l'émetteur assimilable à un disque de diamètre D (fig. 9).

L'expression précédente devient :

$$\rho_i = \frac{j_0 h_1 \sqrt{1 + r_i'^2}}{(r_3^2 - r_1^2)_i U_i} \quad (43)$$

$$\text{avec } h_1 = \left| r_3^2 - r_1^2 \right|_{z=0} \quad (44)$$

Les formules exprimant le nombre ρ_i/j_0 , compte tenu des valeurs de la vitesse initiale U_0 des ions, s'obtiennent tout aussi aisément.

2.2 - Représentation analogique des conditions aux limites :

Le potentiel analogique Φ qui satisfait, en tout point du réseau, à l'équation :

$$\Delta \Phi = -k \rho / \epsilon_0 \quad (45)$$

doit traduire sur le contour les conditions aux limites du problème physique.

Soit (Γ) une frontière du domaine (contour d'une électrode par exemple). Dans le cadre de la propulsion ionique deux cas peuvent se présenter :

.../...

2.2.1 - Problème de Dirichlet :

Le potentiel Φ est connu sur une électrode (Γ). Cette condition aux limites, particulièrement simple, se rencontre dans tous les cas quelle que soit la valeur de la vitesse initiale U_0 des particules électriques.

Supposons $U_0 = 0$. Sauf dans le cas où la "saturation" (cf. 2.2.2.) est traitée directement au réseau, il suffit donc d'afficher les potentiels Φ_e , Φ_f et Φ_a sur les électrodes émettrice, focalisatrice et accélératrice.

En général le contour (Γ) coupe les mailles (fig. 10). Les équations (16) et (17) ne sont plus valables pour les résistances joignant un noeud tel que O à la frontière. En appliquant toutefois la méthode des différences finies (avec correction éventuelle due à la proximité de l'axe) en ce noeud, les conductances qui aboutissent en O s'expriment par :

$$C_1 \Delta z_1 - C_3 \Delta z_3 = 0$$

$$\downarrow$$

$$C_3 = C_1 \frac{\Delta z_1}{\Delta z_3} \quad \text{avec} \quad C_1 = \beta r \frac{\Delta r^2}{\Delta z^2} \quad (17)$$

r désignant la distance du noeud O à l'axe du propulseur.
Comme : $\Delta r_4 = \Delta r$ et $\Delta z_1 = \Delta z$

Il vient

$$C_3 = \beta r \frac{\Delta r^2}{\Delta z \Delta z_3} \quad (46)$$

De plus, les valeurs des conductances C_r étant prises au milieu des mailles, nous avons :

$$\begin{cases} C_4 = \beta \left(r - \frac{\Delta r}{2} \right) \\ C_2 = \beta \left(r + \frac{\Delta r_2}{2} \right) \end{cases} \quad (47)$$

.../...

Une condition de Dirichlet, relativement facile à réaliser, exige néanmoins de la précision dans le calcul des résistances voisines de la frontière. La continuité du champ Φ et des dérivées partielles $\frac{\partial \Phi}{\partial r}$ et $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$ dans cette partie du domaine et, par suite, la forme des trajectoires en résulte.

A propos de cette continuité le principe même de la méthode d'interpolation parabolique, appliqué sur la calculatrice arithmétique Gamma AET, apporte de sérieuses difficultés. En effet, le calcul de la dérivée seconde $\frac{d^2 r}{dz^2}$, en un point M_1 situé sur une normale à l'émetteur et voisin de celui-ci, nécessite la connaissance des valeurs du champ Φ en neuf noeuds entourant M_1 (cf. 1.4.). Certains de ceux-ci se trouvent, dans le cas général, à l'intérieur de l'électrode (cette difficulté peut se rencontrer dans tous les cas où une trajectoire ionique passe à proximité d'une électrode, quelle que soit celle-ci). Le potentiel analogique Φ qui représente au réseau le potentiel physique V est constant à l'intérieur de chaque électrode. La figure 11 montre, par exemple, l'évolution de Φ au voisinage de la frontière émettrice dans une section $r = r_j$. Il apparaît que pour $0 < z < z_{ej}$ le potentiel Φ est égal à Φ_e . Au delà de $z = z_{ej}$ la fonction potentiel varie brusquement, la dérivée partielle $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$ étant, en général, discontinue pour $z = z_{ej}$. La méthode d'intégration de RUNGE-KUTTA, basée sur des fonctions continues, donne dans ces conditions des résultats erronés.

La solution adoptée pour éviter de telles discontinuités sur les dérivées partielles du champ, consiste à remplacer la courbe Φ par une suite d'arcs de parabole et de la prolonger dans le domaine $0 < z < z_{ej}$ correspondant à l'intérieur de l'électrode.

Cette méthode d'extrapolation parabolique, réalisée sur IBM 610, permet d'imposer rigoureusement la valeur Φ_e au point z_{ej} et par suite de respecter la condition de Dirichlet satisfaite au réseau électrique.

Le principe de l'extrapolation parabolique est donc identique à celui décrit au paragraphe 1.4. Le champ analogique est donné aux noeuds des mailles par les coordonnées des noeuds et la valeur Φ du potentiel. Une suite discrète de points repérés par leurs coordonnées (r_j, z_{r_j}) schématise la frontière (Γ) de l'électrode. A l'intérieur de celle-ci le potentiel analogique garde une valeur constante Φ_r . On recherche les valeurs de Φ pour les points situés à l'intérieur de l'électrode de telle sorte que $\Phi = \Phi_r$ sur (Γ) .

Les coordonnées sont dans la réalité r et z . La recherche du potentiel peut s'effectuer soit à $r = \text{constante}$, soit à $z = \text{constante}$. (Pour ne pas particulariser dans le programme, les coordonnées s'appellent x et y , y est constant, x variable).

L'extrapolation à l'intérieur de l'électrode s'effectue à partir du point frontière et des deux points les plus voisins en représentant la variation du champ par une parabole passant par ces trois points (fig. 12).

$$\Phi(x) = \Phi_r \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_r-x_1)(x_r-x_2)} + \Phi_1 \frac{(x-x_2)(x-x_r)}{(x_1-x_2)(x_1-x_r)} + \Phi_2 \frac{(x-x_r)(x-x_1)}{(x_2-x_r)(x_2-x_1)} \quad (48)$$

Le mode d'extrapolation choisi (r constant ou z constant) dépend de la forme extérieure des électrodes. La figure 13 montre les différents modes adoptés dans le cas du problème de révolution (cf. 4.2.).

De toute façon, pour une géométrie donnée du système d'électrodes, ce qui importe c'est la position des trajectoires par rapport aux diverses frontières. Ce problème de voisinage est primordial et conditionne les modes d'extrapolation à adopter. Seuls les résultats expérimentaux peuvent renseigner efficacement; c'est donc à eux qu'il faut se référer dans tous les cas.

.../...

Le champ physique, discontinu à la frontière de chaque électrode, est donc remplacé par un champ continu. Les trajectoires analogiques, obtenues par ce procédé, peuvent-elles être considérées comme identiques aux trajectoires réelles ? La théorie des distributions de L. SCHWARTZ [12] (cf.annexe II) permet de donner une réponse satisfaisante à cette question.

2.2.2 - Problème de NEUMANN :

La dérivée normale $\frac{d\Phi}{dn}$ est connue sur la frontière (Γ). Cette condition aux limites se présente lorsque l'on veut réaliser la "saturation" c'est-à-dire annuler le champ électrique à la surface de l'émetteur.

Examinons la représentation au réseau de la condition $\frac{d\Phi}{dn} = 0$.

2.2.2.1 - Cas du problème unidimensionnel :

Comme nous le verrons plus loin (cf.4.1.2.) la diode plane peut se schématiser au réseau suivant une ligne de résistances que l'on peut supposer égales entre elles (maillage régulier). Les intensités injectées en chaque noeud sont respectivement $i_1, i_2, \dots, i_n$ (fig. 14).

Pour réaliser la condition $\frac{d\Phi}{dn} = 0$ sur l'électrode émettrice il suffit tout simplement de laisser le noeud 0, image de la source d'ions, prendre un certain potentiel tout en imposant $\Phi = 0$ sur le noeud $(n + 1)$ représentant l'électrode accélératrice. Le potentiel du noeud 0 est alors parfaitement déterminé, compte tenu des valeurs des résistances R^* et de celles des intensités injectées.

Le noeud 0 ne débitant pas, l'intensité, qui traverse la résistance reliant ce noeud au suivant, est donc nulle.

Par suite

$$\begin{array}{ll}
 \Phi_1 = \Phi_0 & i_1 = I_1 \\
 \Phi_1 - \Phi_2 = RI_1^* & I_1 + i_2 = I_2 \\
 (49) \quad \Phi_2 - \Phi_3 = RI_2^* & \text{et} \quad I_2 + i_3 = I_3 \quad (50) \\
 \hline
 \Phi_n - \Phi_{n+1} = RI_n^* & I_{n-1} + i_n = I_n \\
 \Phi_{n+1} = 0 & \downarrow \\
 & \sum_{k=1}^{k=n} i_k \\
 & I_n =
 \end{array}$$

2.2.2.2 - Cas du problème de révolution :

Le problème se complique sensiblement pour deux raisons qui proviennent de

- la représentation au réseau de la forme de l'émetteur, par une suite de points discrets, qui ne permet pas d'imposer la condition $\frac{d\Phi}{dn} = 0$ sur toute l'électrode.

- la présence d'une électrode focalisatrice qui doit débiter tout en restant au même potentiel que l'électrode émettrice.

Expérimentalement il suffit de régler l'intensité I envoyée dans l'électrode focalisatrice à travers une résistance R variable, de façon à égaliser les potentiels de cette électrode et de l'émetteur (fig. 15).

Si en chaque point de la source d'ions, nous devons avoir $\frac{d\Phi}{dn} = 0$ il en résulte que l'intensité totale $\int \frac{d\Phi}{dn} ds$ doit également être nulle. Dans le cas qui nous intéresse plus particulièrement, la forme de l'électrode émettrice (calotte sphérique) ne nous permet pas, dans le procédé expérimental adopté, d'imposer la condition $\frac{d\Phi}{dn} = 0$ à chacun des points schématisant cette forme au réseau. C'est ainsi

.../...

que nous avons (fig. 16) en des points tels que A et B :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \quad \text{en A}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{en B}$$

puisque les intensités circulant dans les résistances électriques reliant ces points A et B au noeud M sont nulles.

Le réglage de l'intensité I étant terminé, l'électrode émettrice ne débite aucun courant tout en étant au même potentiel que l'électrode focalisatrice. Sans toutefois satisfaire à la condition $\frac{d\Phi}{dn}=0$ en chaque point de la frontière d'où sont issus les ions, nous voyons que le procédé expérimental respecte la condition de débit nul sur cette électrode ce qui, finalement, doit vérifier, d'une façon approximative mais suffisante, les conditions aux limites du problème physique.

C H A P I T R E I I I

REALISATION ANALOGIQUE

3.1 - Le réseau électrique :

Le réseau est composé de plusieurs panneaux isolants fabriqués à l'ONERA. Ces panneaux comportent dix rangées de vingt noeuds et sont aisément connectables entre eux. La disposition choisie pour les noeuds forme sur les panneaux, un quadrillage régulier, ce qui permet de réaliser un réseau à mailles rectangulaires, égales ou non.

Chaque noeud est matérialisé par une douille en laiton, située sur la face arrière du réseau, permettant l'introduction d'une fiche banane pour relever le potentiel ou injecter une intensité.

Entre deux noeuds successifs est placée la résistance électrique logée dans la fiche d'une prise de courant (fig. 17).

Chaque prise de courant, d'écartement standard de 19 mm, permet donc de connecter deux à deux les noeuds du panneau. La réalisation d'une valeur donnée de conductance, s'effectue simplement en branchant plusieurs résistances les unes sur les autres, ce qui a pour effet de les mettre en parallèle. (Fig. 17).

Une vue de face du réseau électrique qui permet de traiter l'équation de POISSON, dans le cas tridimensionnel à symétrie axiale, est représentée sur la figure 18.

3.2 - Découpage du domaine :

Le pas du découpage, c'est-à-dire la longueur d'une maille, est fonction d'un certain nombre de paramètres connus, en général, au début de l'étude : gradient de potentiel élevé dans telle ou telle région, formes difficiles à représenter, points particuliers où l'on désire effectuer des mesures.

Dans le cadre de la propulsion ionique, la densité de charge locale ρ prend des valeurs très fortes près de la frontière émettrice (cf. fig. 19).

Le maillage doit donc être suffisamment fin pour que de telles valeurs soient effectivement traduites sous forme de courants électriques injectés dans le réseau. Par suite il est souhaitable de resserrer les mailles dans la partie du champ considérée. La figure 18 bis représente une vue de face du réseau électrique après modification du maillage au voisinage de la frontière émettrice.

Considérons une croix extraite du domaine d'étude (D) de la fonction potentiel Φ (fig. 20).

L'identité des équations (7)' et (14) exige que :

$$C_1 \Delta z_1 - C_3 \Delta z_3 = 0 \quad (51)$$

$$r \Delta r (C_2 - C_4) = \frac{C_1 \Delta z_1^2 + C_3 \Delta z_3^2}{2} = \frac{\Delta r^2 (C_2 + C_4)}{2} = \frac{i_0 \epsilon_0}{k \rho} \quad (52)$$

La résolution d'un tel système conduit aux formules suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 = \frac{C_0 \Delta r}{\Delta z_1} r \\ C_2 = \frac{C_0 (\Delta z_1 + \Delta z_3)}{2 \Delta r} \left(r + \frac{\Delta r}{2} \right) \\ C_3 = \frac{C_0 \Delta r}{\Delta z_3} r \\ C_4 = \frac{C_0 (\Delta z_1 + \Delta z_3)}{2 \Delta r} \left(r - \frac{\Delta r}{2} \right) \end{array} \right. \quad (53)$$

r désignant la distance du noeud 0 à l'axe du propulseur et C_0 une constante égale à $\beta \frac{\Delta r}{\Delta z}$.

.../...

Ces formules peuvent également s'obtenir par la méthode indiquée par Karplus [13] en calculant la résistance électrique, dans une direction donnée, d'un élément de volume découpé dans un onglet. La figure 21 indique le découpage adopté près de l'électrode émettrice. Soient C , C' et C'' les conductances aboutissant à un noeud M situé hors du domaine démaillé. Il apparaît alors, que la division par un nombre n de la longueur Δz des mailles orientées vers les z , tout en conservant un pas de découpage Δr constant dans la direction des r , entraîne une modification dans les valeurs de résistances. Ainsi, celles qui se trouvent suivant l'axe des z , sont divisées par n et les autres, disposées dans la direction perpendiculaire, sont multipliées par le même nombre, sauf à la frontière de deux domaines à découpages distincts.

L'intensité électrique injectée dans le réseau en un noeud tel que O (fig. 20) satisfait aux équations (52).

$$\text{D'où : } i_0 = \frac{k\rho}{\epsilon_0} \frac{C_1 \Delta z_1^2 + C_3 \Delta z_3^2}{2} \quad (54)$$

3.3 - Alimentation électrique du réseau :

Il existe de nombreux moyens de réaliser l'alimentation électrique des réseaux :

- alimentation en courant continu, fourni soit par une batterie d'accumulateurs, soit par un quelconque système redresseur.

- alimentation en courant sinusoïdal de 800 à 1 000 périodes, fourni par un générateur basses fréquences associé à un amplificateur de puissance [14].

.../...

- alimentation en courant alternatif 50 périodes, fourni par le secteur et porté au potentiel convenable par l'intermédiaire d'un transformateur.

Les mesures étant effectuées par une méthode de zéro, un oscillographe cathodique, monté en figures de Lissajous, sert d'indicateur de zéro lorsque le réseau est alimenté en courant alternatif. Cette méthode, satisfaisante dans la plupart des expériences analogiques réalisées au laboratoire sur des problèmes relevant des équations de Laplace, de la chaleur ou des ondes, se révèle expérimentalement impossible dans le cadre de cette étude. En effet, le montage comporte des grandes résistances, utilisées pour l'injection du courant i_0 représentant la charge d'espace en chaque noeud. Ces grandes résistances ne sont pas rigoureusement pures; des effets de self et de capacité introduisent des déphasages importants (de l'ordre de 6° c'est-à-dire dix fois plus que les maximums relevés à la cuve électrolytique) qui rendent pratiquement impossible la mesure précise des potentiels.

Nous avons donc préféré le courant continu. Afin d'éviter les mesures longues et délicates occasionnées par les galvanomètres, extrêmement sensibles certes, mais dont la fragilité et la lenteur à se stabiliser ne s'accordent guère avec l'importance des expériences réalisées, un millivoltmètre numérique est utilisé en quotientmètre. L'appareil choisi, un "digital voltmètre" V-34 A de la Non Linear Systems permet d'effectuer des relevés de potentiel au $1/10\ 000$, d'une manière automatique ou manuelle, le temps maximal nécessaire à une mesure étant de l'ordre de deux secondes. (Fig.22).

3.4 - Injection de courant : méthode des grandes résistances :

La méthode classique dite des "grandes résistances" [15] consiste à alimenter chaque noeud (du réseau), situé dans le domaine traversé par le faisceau ionique, par une résistance,

.../...

de valeur très grande, reliée à l'un des pôles du générateur de courant (par convention ± 100 de l'échelle des potentiels analogiques).

Les grandes résistances sont disposées dans des tiroirs (fig. 23) qui contiennent chacun 4×11 commutateurs gradués en conductance, c'est-à-dire proportionnellement aux intensités désirées. L'échelle utilisable va de $100 \text{ K}\Omega$ à $10 \text{ M}\Omega$. Elle peut être complétée en mettant en parallèle des conductances étalonnées.

En chaque noeud, la valeur de l'intensité i_o nous est fournie par l'expression :

$$i_o = \frac{k \rho C_z \Delta z^2}{\epsilon_o} \quad (55)$$

A cette valeur de i_o correspond une conductance C_o lue sur le commutateur telle que :

$$i_o = 100 C_o \quad (56)$$

L'intensité réelle qui parcourt la grande résistance et pénètre dans le réseau vaut :

$$i_r = \frac{100 - \Phi_o}{R_o} = (100 - \Phi_o) C_o \quad (57)$$

Φ_o désignant le potentiel du noeud considéré.

L'erreur commise sur l'affichage des intensités est donc de $\Phi_o \%$. Compte tenu des valeurs de résistances employées dans le cadre de cette étude, les potentiels analogiques atteignent des valeurs très fortes (8 à 10 dans le cas de la

.../...

première méthode indiquée en 4.1.3.1. et même 40 lorsque la "saturation" est traitée directement au réseau). Il faut donc corriger l'intensité réelle entrant dans le réseau. L'opération s'effectue de la manière suivante :

Une première approximation consiste à adopter une conductance égale à C_0 en un noeud 0 du réseau. Il en résulte un potentiel Φ_0 . Il suffit dès lors de remplacer C_0 par une conductance C_1 telle que :

$$C_1 = \frac{100 C_0}{100 - \Phi_0} \quad (58)$$

pour obtenir une nouvelle valeur Φ_1 du potentiel.

L'intensité envoyée dans le réseau devient alors :

$$I_{r_1} = I_0 \frac{100 - \Phi_1}{100 - \Phi_0} \quad (59)$$

Pour que l'intensité réelle pénétrant dans le réseau soit i_0 , il faudrait poursuivre les corrections jusqu'à la n^{ème} approximation de telle sorte que les champs Φ_{n-1} et Φ_n soient les mêmes.

Les expériences effectuées sur le cas aisément calculable de la diode plane, ont montré qu'une seule correction des grandes résistances est bien suffisante pour obtenir des résultats satisfaisants.

La figure 24 représente le montage électrique correspondant à l'une des méthodes décrites au paragraphe 4.1.3. Une alimentation stabilisée fournit la tension continue de réf-

rence $+ V_r$ comprise dans l'intervalle 0-30 volts. Les mesures de potentiel étant toutes positives, seule la référence + nous intéresse. Le voltmètre V-34 A, utilisé en quotientmètre, nous permet donc d'enregistrer les résultats expérimentaux dans l'échelle analogique 0-100. Les intensités électriques i_0 , représentant la charge d'espace, sont injectées dans le réseau par l'intermédiaire des grandes résistances branchées entre la référence + 100 et le noeud considéré.

La figure 25 donne une vue d'ensemble du montage expérimental permettant la représentation de l'équation de POISSON au réseau électrique.



C H A P I T R E I V

APPLICATION AU PROBLEME TRIDIMENSIONNEL

A SYMETRIE AXIALE

Afin d'éprouver la rapidité de convergence du processus d'itération et d'évaluer la précision de la méthode de calcul, il paraît utile de traiter, au préalable, le problème de la diode plane.

4.1 - Vérification de la méthode sur le cas théorique de la diode plane :

4.1.1 - Etude théorique :

Si l'on considère un métal placé dans le vide à la température T , une partie des "électrons libres" a tendance à quitter le solide. En l'absence d'action extérieure il en résulte qu'il s'établit un champ électrique dit "de charge d'espace" qui s'oppose au départ de nouveaux électrons et conduit ainsi à un équilibre.

Lorsqu'on entraîne, au moyen d'un champ électrique appliqué, les électrons émis, le phénomène se poursuit et conduit à un équilibre dynamique caractérisé par un certain flux d'électrons (densité de courant); cette densité croît avec le champ appliqué; toutefois elle ne peut pas dépasser la valeur correspondant au "courant de saturation" j_s qui correspond à l'émission thermoionique à la température considérée; la valeur de j_s est donnée par la formule de Dushman :

$$j_s = AT^2 \exp\left(-\frac{\psi}{k'T}\right) \quad (60)$$

où k' représente ici la constante de Boltzmann.

L'application d'un champ électrique accélérateur à la surface d'un solide est susceptible d'en augmenter l'émission électronique et ceci selon deux processus distincts : l'effet Schottky et l'émission froide [16].

Ces deux effets ne sont pas représentés au réseau électrique.

Considérons une diode plane dont les deux électrodes distantes de d (fig. 26), sont portées respectivement aux potentiels V_s et 0.

La résolution de l'équation de Poisson $\frac{d^2V}{dz^2} = -\rho/\epsilon_0$ aboutit au résultat classique (61) :

$$1 - \frac{V}{V_s} = \left(\frac{z}{d}\right)^{4/3} \quad (61)$$

lorsque la densité de courant ionique prend la valeur à saturation (62)

$$j_s = \frac{4}{9} \epsilon_0 \sqrt{\frac{2e}{m}} \frac{V_s^{3/2}}{d^2} \quad (62)$$

4.1.2 - Résolution de l'équation de Poisson au réseau électrique :

La figure 27 montre schématiquement les caractéristiques d'un noeud 0. Nous avons :

$$C_1 (\Phi_1 - \Phi_0) + C_3 (\Phi_3 - \Phi_0) + i_0 = 0$$

En se limitant aux termes du second ordre il vient :

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_0 (C_1 \Delta z_1 - C_3 \Delta z_3) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right)_0 (C_1 \Delta z_1^2 + C_3 \Delta z_3^2) + i_0 = 0$$

Dans le cas d'un maillage régulier :

$$\Delta z_1 = \Delta z_3 = \Delta z ; \quad C_1 = C_3 = C_z ;$$

et en posant $\Phi = kV$ tel que $k = \frac{100}{V_s}$, l'expression de l'intensité i_0 injectée dans le réseau, au noeud considéré, est toujours :

$$i_0 = \frac{k\rho}{\epsilon_0} C_z \Delta z^2 \quad (55)$$

.../...

La vitesse d'un ion s'exprime par :

$$U = \sqrt{\frac{2e}{m} (V_s - V)} \quad (63)$$

(dans le cas où les particules positives sont émises sans vitesse initiale) et la charge d'espace par :

$$\rho = \frac{j_0}{U} \quad (64)$$

V_s désignant le potentiel accélérateur, posons toujours :

$$\alpha = \sqrt{\frac{2e}{m} V_s} \quad (40)$$

L'intensité i_0 se transforme suivant :

$$i_0 = \frac{k C_z \Delta z^2}{\epsilon_0 \alpha} \frac{j_0}{\sqrt{1 - \frac{\Phi}{100}}} \quad (65)$$

Le potentiel analogique doit vérifier l'équation :

$$\boxed{\frac{\Phi}{100} = 1 - \left(\frac{z}{d}\right)^{4/3}} \quad (66)$$

lorsque la densité de courant j_0 prend la valeur à saturation j_s , ce qui donne comme intensité :

$$i_0 = \frac{400}{9} C_z \frac{\Delta z^2}{d^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\Phi}{100}}} \quad (67)$$

Les expériences tests effectuées sur le problème de la diode plane ont montré qu'il y avait intérêt à démailler le réseau au voisinage de la cathode émettrice afin d'améliorer la précision.

.../...

Dans l'expression (65) de l'intensité i_0 , il suffit dès lors, de remplacer le produit $C_z \Delta z^2$ par $\frac{C_{z_1} \Delta z_1^2 + C_{z_3} \Delta z_3^2}{2}$, les indices 1 et 3 désignant les noeuds encadrant² le noeud central 0. Le réseau, qui se limite en fait à une ligne, est divisé en vingt-cinq mailles, les noeuds étant repérés respectivement par les valeurs suivantes de z/d : 0; 0.005; 0.010; 0.025; 0.0375; 0.05; 0.10; 0.95 et 1. Les résistances électriques employées sont choisies égales à : 50Ω ; 125Ω et 500Ω .

4.1.3 - Méthodes de résolution :

Le but recherché étant la configuration du potentiel correspondant à la loi de Child (66) il faut donc, dans la résolution par approximations successives, injecter dans le réseau des intensités électriques correspondant à la densité de saturation J_s et partant à l'annulation du gradient $\frac{d\Phi}{dn}$ sur la surface émettrice.

Le champ Poissonien Φ_P satisfait à l'équation :

$$\Delta \Phi_P = -k\rho/\epsilon_0 \quad (68) \text{ avec } k = \frac{100}{V_s}$$

tandis que le champ Laplacien Φ_L obéit à l'équation classique : $\Delta \Phi_L = 0$

Posons :

$$\varphi = \Phi_P - \Phi_L \quad (69)$$

Le potentiel analogique φ ainsi défini satisfait également à l'équation de Poisson :

$$\Delta \varphi = -k\rho/\epsilon_0 \quad (70)$$

L'étude de la fonction φ présente l'avantage d'augmenter la précision sur le champ Poissonien.

.../...

Les conditions aux limites se réduisent à l'imposition du potentiel zéro sur les deux électrodes (dans le cas où la vitesse initiale des particules est nulle). Dans chaque approximation, les intensités injectées par l'intermédiaire des grandes résistances (ces dernières subissant la correction introduite dans le paragraphe 3.4.) obéissent à la loi (67). Les courbes donnant l'évolution du potentiel Φ_P , dans chaque approximation, (planches IV₁ et IV₁ bis) traduisent les résultats numériques du tableau IV.

La méthode aboutit donc à une excellente convergence puisque l'écart moyen par rapport à la solution théorique est de - 0,28 % à la quatrième approximation, l'écart moyen étant défini par :

$$\varepsilon \% = \frac{1}{25} \sum_{i=1}^{i=25} \left(\frac{\Phi_i - \Phi_{Ti}}{\Phi_{Ti}} \right) \% \quad (71)$$

Φ_i et Φ_{Ti} désignant respectivement les valeurs expérimentale et théorique du potentiel Poissonnien au noeud i.

Malheureusement cette méthode n'est pas applicable dans le cas du problème de révolution avec des formes d'électrodes quelconques, car il faudrait connaître la valeur de la densité de courant à saturation j_s . Cette dernière étant une inconnue du problème, il faut trouver un procédé expérimental imposant de façon aussi satisfaisante que possible la condition $\frac{d\Phi}{dn} = 0$ sur l'émetteur, tester ce procédé sur le cas théorique de la diode plane afin d'apprécier son intérêt et d'évaluer sa précision.

4.1.3.1 - Première méthode :

Elle est basée sur la résolution de l'équation :

$$\Delta \varphi = - k e / \varepsilon_0 \quad (70)$$

.../...

les intensités injectées obéissant à la loi (65), cette dernière subissant la modification précédemment indiquée à la frontière de deux mailles différentes.

Le paramètre j_0 étant supposé variable, la détermination de la valeur à saturation j_s de la densité d'émission s'opère expérimentalement. Le principe de la méthode qui repose sur la mesure de l'intensité débitée par l'électrode émettrice est le suivant :

Au champ Laplacien correspond une intensité i_L positive, par convention, les courants analogiques se dirigeant vers les z croissants dans le cas de la propulsion ionique.

Au champ $\varphi = \Phi_P - \Phi_L$ correspond une intensité négative i_φ qu'il suffit de mesurer, par une méthode de zéro. On en déduit aisément l'intensité analogique i_P .

Le cycle d'approximations s'effectuant à j_0 donné il suffit donc de calculer le rapport i_P/i_L en % pour chacune d'entre-elles et de tracer la courbe montrant l'évolution de ce rapport (cf. planches IV₂, IV₃, IV₄). A chaque valeur de la densité d'émission correspond une convergence (repérée par son écart moyen ϵ %) dès la quatrième approximation. La représentation des différents résultats sous forme de courbe $(i_P/i_L - i_{P4}/i_L) \%$, fonction de $\epsilon_4 \%$ (fig. 28) calculé à la quatrième approximation, indique l'écart, par rapport à la solution théorique, correspondant à un gradient donné du rapport $i_P/i_L \%$ (gradient déterminé à partir des deux dernières approximations). Le tableau V reproduit les résultats relatifs à une série d'expériences effectuées avec j_0 constant. La courbe de la figure 28 peut donc servir de test dans le cas du problème tridimensionnel à symétrie axiale en remarquant qu'un gradient $(i_P/i_L - i_{P4}/i_L)$ compris entre 1,95 % et 7,80 % correspond à une convergence située entre - 1 % et + 1 % de la convergence idéale.

Cette méthode appliquée au cas théorique de la diode plane permet donc d'établir la valeur expérimentale de j_0 conduisant à la convergence parfaite. Le nombre trouvé, $j_0 = 48,20 \text{ A/m}^2$, diffère donc de 1,7 % de la valeur théorique $j_0 = 47,38 \text{ A/m}^2$ déduite des caractéristiques du tube. Celles-ci sont :

$$\begin{aligned}\epsilon_0 &= 8,85374 \cdot 10^{-12} \text{ F/m} \\ d &= 10^{-2} \text{ m} \\ V_s &= 10^4 \text{ V} \\ \alpha &= 1,20406 \cdot 10^5 \text{ m/s}\end{aligned}$$

les particules électriques choisies étant des ions de Césium dont la charge et la masse sont :

$$\begin{aligned}e &= 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \\ m &= 2,21 \cdot 10^{-25} \text{ kg}\end{aligned}$$

Cet écart de 1,7 %, sur la valeur de la densité d'émission, dû en grande partie au mode d'injection des courants simulant la charge d'espace (car dans la pratique une seule correction a été apportée aux grandes résistances cf. 3.4.), n'entraîne toutefois qu'une erreur minime ($-0,28\%$) sur la répartition du potentiel obtenue après convergence du procédé itératif.

4.1.3.2 - Seconde méthode :

Elle est basée sur la résolution directe de l'équation :

$$\Delta \Phi_P = -k\rho/\epsilon_0 \quad (68)$$

Au paragraphe 2.2.2.1. nous avons vu que pour imposer sur l'émetteur la condition $\frac{d\Phi}{dn} = 0$ (qui se transforme en $\frac{d\Phi}{dz} = 0$), il suffit de laisser le

.../...

noeud 0, image de la source d'ions, prendre un potentiel qui est parfaitement défini à partir des caractéristiques du réseau et des intensités injectées en chacun des autres noeuds. L'expérience achevée, il faut traduire les résultats numériques dans l'échelle 0 - 100.

Toutefois le noeud 1, le plus proche de l'émetteur, étant au même potentiel que celui-ci, il devient impossible ensuite de calculer l'intensité simulant la charge d'espace en ce noeud puisque, d'après l'équation (65), sa valeur est infinie. Pour pallier à cet inconvénient, il semble logique de corriger le potentiel en ce noeud 1 en "lissant" la courbe donnant la répartition du potentiel électrique au voisinage de la source d'ions. Le lissage adopté consiste soit en l'application d'une méthode d'interpolation parabolique basée sur les résultats numériques connus sur les noeuds 0, 2 et 3 lorsqu'elle est possible (cas le plus fréquent), soit en l'application d'une méthode graphique. La résolution de l'équation (68) par un tel procédé, testé pour différentes valeurs de la densité de courant j_0 , s'est montrée très satisfaisante.

L'avantage de cette seconde méthode analogique réside surtout dans le choix du paramètre j_0 ; quelle que soit la valeur de celui-ci la "saturation" est obtenue au réseau électrique par l'imposition de la condition $\frac{d\Phi}{dn} = 0$. On peut donc adopter une valeur de j_0 différente de celle à saturation et obtenir une concordance excellente avec la loi (66) dès la quatrième approximation.

Toutefois, afin de diminuer les potentiels analogiques et par conséquent de réduire l'importance des corrections éventuelles apportées aux grandes résistances dans la simulation de la charge d'espace par des courants électriques, il y a

.../...

intérêt à ce que la valeur de J_0 soit plus petite que j_s . Par exemple (Planches IV₅, et tableau VI) la convergence obtenue avec une densité d'émission égale à 10 A/m^2 est excellente : + 0,16 % d'écart moyen entre la répartition expérimentale du potentiel et la loi théorique (66).

4.1.3.3.- Troisième méthode :

La saturation peut encore s'obtenir rigoureusement dans le cas du problème unidimensionnel en raisonnant sur l'équation (70)

$$\Delta\varphi = -k\rho/\varepsilon_0 \quad (70)$$

$$\text{avec } \varphi = \Phi_P - \Phi_L \quad (69)$$

Par suite :

$$\frac{d\varphi}{dn} = \frac{d\Phi_P}{dn} - \frac{d\Phi_L}{dn} \quad (72)$$

La résolution expérimentale de l'équation de LAPLACE conduit à une intensité i_L (débit de l'électrode émettrice) positive par convention (cf 4.1.3.1.-)

$$\text{Donc : } i_L = \frac{d\Phi_L}{dn} = \frac{d\Phi_L}{dz}$$

Il suffit, dès lors, de régler la valeur du paramètre J_0 , à chaque approximation, de façon que les intensités électriques, injectées dans le réseau et satisfaisant à l'expression (65), conduisent à un débit de l'électrode émettrice tel que :

$$i_\varphi = \frac{d\varphi}{dn} = -i_L \quad (73)$$

D'après l'équation (72) il vient alors :

$$i_p = \frac{d\Phi_p}{dn} = 0$$

Cette troisième méthode est probablement la meilleure. Elle nous permet, en effet, de connaître la répartition du potentiel satisfaisant à la loi de CHILD (66) et la valeur de la densité d'émission ionique à saturation.

Dans chaque approximation on commence par réaliser approximativement la saturation de façon à ce que les corrections apportées aux grandes résistances, servant à l'injection des courants électriques, entraînent la vérification de la condition

$$\frac{d\Phi_p}{dn} = 0 \quad \text{à} \quad \pm 0,25 \%$$

Cette méthode, testée sur le problème de la diode plane, a permis de retrouver la valeur de la densité d'émission J_s (47,38 A/m²) et d'obtenir une répartition du potentiel très proche de la loi (66), l'écart moyen étant égal à - 0,10 %.

Le tableau VII montre l'évolution des grandeurs J_{os} et ε %. Il apparaît ainsi que, la seconde approximation, la fonction Φ vérifie de façon acceptable (ε % = - 1,32) l'équation (66).

Les résultats expérimentaux reproduits sur le tableau VIII et les planches IV₆ et IV₆ bis prouvent que la convergence s'obtient très rapidement, le paramètre J_s et la loi théorique (66) étant vérifiés de manière excellente.

./...

4.2.- Applications des différentes méthodes au problème de révolution :

Dans cette étude les particules électriques sont supposées sans vitesse initiale. L'émetteur, de forme sphérique, permet de donner une orientation satisfaisante aux trajectoires ioniques en les faisant converger vers l'axe du propulseur dans le cas où la charge d'espace est négligée. La configuration des deux autres électrodes, reproduite sur la figure 29, est assez voisine de celle de la publication [4].

Les résistances électriques du réseau, mesurées à 0.5 % près, ont des valeurs comprises entre 30Ω et $300 K\Omega$. La méthode des valeurs vraies associée à celle du cylindre creux (cf. annexe I) est appliquée au voisinage de l'axe du propulseur. Par contre, au delà du rayon limite r_ℓ la méthode des différences finies suffit largement (Tableau I).

Les caractéristiques géométriques du canon ionique (Fig. 29) se traduisent aisément au réseau, compte tenu du découpage adopté :

$$25 \Delta r = 10^{-2} \text{ m}$$

Les autres données (masse et charge des ions, permittivité absolue du vide, potentiel accélérateur) sont identiques à celles énumérées au paragraphe 4.1.3.1.-

./...

4.2.1 - Champ Laplacien :

Les conditions aux limites, du type Dirichlet, sont les suivantes sur les trois électrodes :

$$\begin{cases} \Phi_e = \Phi_f = 100 \\ \Phi_a = 0 \end{cases}$$

L'obtention du champ Laplacien Φ_L / (champ I) solution de $\Delta \Phi = 0$ est immédiate. La figure 30 donne la répartition des équipotentiels dans un demi-plan méridien. L'exploitation, par le centre de calcul, de ce champ conduit au réseau de trajectoires de la figure 31 après une extrapolation parabolique (cf. paragraphe 2.2.1.) faite avec le plus grand soin afin que les dérivées partielles $\frac{\partial \Phi}{\partial r}$ et $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$ soient continues au voisinage des trois électrodes (et plus particulièrement près de l'émetteur). Ces trajectoires convergent assez fortement vers l'axe du propulseur. Certaines d'entre elles, même, se croisent vers la sortie du canon. Le calcul de la charge d'espace, selon la méthode exposée dans le premier chapitre, n'est évidemment plus valable à partir de l'intersection de deux trajectoires.

4.2.2. - Champ Poissonnien :

L'expression (41) du nombre sans dimension α_{P/j_0} devient :

$$\alpha_{P/j_0} = \frac{2Rh_0 \sqrt{\frac{100(1+r_l'^2)}{100-\Phi_i}}}{(r_3^2 - r_1^2)_i} \quad (41)'$$

Le nombre de trajectoires utilisées pour le calcul de la charge d'espace, dans tout le domaine occupé par les ions, est égal à vingt pour un demi-plan méridien. Les valeurs du paramètre h_0 (fig. 6) pour chaque trajectoire sont reproduites sur le tableau IX.

.../...

4.2.2.1 - Première méthode :

Les conditions aux limites satisfont à l'égalité :

$\varphi_e = \varphi_f = \varphi_a = 0$ puisque l'équation traitée est de la forme :

$$\Delta \varphi = -k\rho / \varepsilon_0 \quad (70) \text{ avec } k = \frac{100}{V_s}$$

Le montage de la figure 32 donne le principe de la méthode reposant sur la mesure de l'intensité débitée par l'électrode émettrice.

Deux alimentations stabilisées, montées en opposition, fournissent les tensions de référence + 100 et - 100. Le point milieu du pont de mesure est relié à l'une des bornes de l'inverseur J. La résistance variable R^* , permettant la mesure de l'intensité i_φ qui pénètre dans l'électrode émettrice, se branche entre cette dernière et la référence analogique - 100. Une dérivation permet d'aboutir à la seconde borne de l'inverseur J. Les intensités i_0 simulant la charge d'espace sont injectées par la méthode des grandes résistances, les électrodes focalisatrice et accélératrice étant portées aux potentiels $\varphi_f = \varphi_a = 0$. L'opération s'effectue de la façon suivante : le galvanomètre G étant branché entre la masse et l'inverseur, ce dernier est placé dans la position (1); le réglage de l'alimentation stabilisée de droite, de telle sorte que l'aiguille du galvanomètre ne dévie plus, permet d'imposer le potentiel 0 au point milieu du pont de mesure; l'inverseur placé en position (2) réalise la jonction entre la borne de sortie du galvanomètre et l'électrode émettrice; il suffit, dès lors, d'agir sur la résistance R^* de façon à imposer le potentiel 0 sur cette électrode, ce qui se traduit par un courant nul dans le galvanomètre.

Une répétition de la manoeuvre ci-dessus permet de vérifier le réglage et de s'assurer de la bonne valeur de la résistance R .

Il est à remarquer, d'ailleurs, que le quotientmètre V 34 A, utilisé pour les relevés de potentiel, peut remplacer avec efficacité le pont de mesure et le galvanomètre précédents (fig. 33). Les mesures montrent une parfaite concordance entre les intensités obtenues à l'aide des deux procédés.

Les résultats de chaque approximation sont consignés sur le tableau X. La planche IV₇ donne l'évolution du rapport i_P/i_L % pour une densité d'émission égale à 15 A/m^2 . Le gradient $(i_{P3}/i_L - i_{P4}/i_L)$ % correspondant conduit à une convergence à $+ 0,21$ % de la répartition à saturation d'après la courbe de la figure 28 prise comme référence. Le cycle d'approximations répété pour plusieurs valeurs de j_0 a permis de mettre en relief les limites, inférieure et supérieure de ce paramètre, susceptibles de donner une convergence satisfaisante. L'intervalle de 14 A/m^2 à 17 A/m^2 , beaucoup plus petit que dans le cas unidimensionnel, est évidemment fonction des résistances du réseau. Toutefois il est entendu que les valeurs numériques accordées à la densité d'émission j_0 dépendent des caractéristiques géométriques et électriques du canon. Si pour des raisons d'ordre technique (champ électrique maximal à ne pas dépasser, nature différente des ions) les valeurs du potentiel accélérateur V_s ou de la masse des corpuscules électriques changeaient, il suffirait de multiplier la valeur de j_0 par un coefficient facile à déterminer, de façon à retrouver au réseau, la même configuration du champ Poissonien. Les figures 34 et 35 donnent respectivement la répartition des lignes équipotentiels et les trajectoires, correspondant à la quatrième approximation, pour une densité j_0 égale à 15 A/m^2 . En comparant ces trajectoires avec celles de la figure 31, l'effet de la charge d'espace mentionné précédemment (cf. 1.1.) s'observe aisément. Le faisceau obtenu à partir des géométries focalisatrice et accélératrice de la figure 29 possède

.../...

donc les qualités souhaitées (cf. introduction).

4.2.2.2.- Seconde Méthode :

La façon de procéder, décrite dans le paragraphe 2.2.2.2.-, entraîne une difficulté déjà rencontrée dans le cas de la diode plane. Toutefois au lieu d'une seule maille (la première) parcourue par un courant nul (l'électrode émettrice ne débitant pas) il s'agit maintenant de plusieurs noeuds successifs qui se trouvent au même potentiel. Tout se passe comme si la surface de l'émetteur avait subi une "translation" vers les z croissants. L'importance de cette "translation" varie dans le même sens que le pas du découpage, au voisinage de l'électrode. La diminution de la longueur des mailles, dans cette partie du champ, agit donc favorablement bien qu'elle entraîne une augmentation du nombre de noeuds portés à un même potentiel.

Dans la pratique, le champ est modifié, dans le domaine considéré, selon une méthode d'extrapolation parabolique déjà décrite (cf. 2.2.1.-). Cette transformation, très délicate à réaliser vu le nombre de noeuds intéressés, exige un soin tout particulier afin d'assurer la continuité des grandeurs Φ , $\frac{\partial \Phi}{\partial r}$ et $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$.

Les calculs effectués avec une densité d'émission ionique constante, égale à 15 A/m^2 , aboutissent à une convergence assez satisfaisante. Il est probable, toutefois, qu'une cinquième approximation se serait révélée souhaitable de façon à perfectionner la convergence du procédé itératif.

Les planches IV_8 , IV_9 , IV_{10} , et IV_{11} donnent la répartition du potentiel analogique Φ aux première, seconde, troisième et quatrième approximations. La figure 36 illustre parfaitement les modifications subies par certaines lignes équipotentiellles au cours des diverses approximations.

./...

Sur les planches IV_{12} et IV_{15} sont tracés les faisceaux de trajectoires relatifs aux première et quatrième approximations.

4.2.2.3.- Troisième méthode :

La généralisation au problème de révolution de la méthode ^{décrite} au paragraphe 4.1.3.3.- entraîne une difficulté due à la représentation de la frontière émettrice.

La condition d'annulation du champ électrique sur l'électrode Γ d'où sont issus les ions s'écrit :

$$\int_{\Gamma} \frac{d\Phi_P}{dn} ds = 0$$

s désignant l'abscisse curviligne sur le contour Γ

L'équation (72) s'écrit dans ce cas :

$$\int_{\Gamma} \frac{d\varphi}{dn} ds = \int_{\Gamma} \frac{d\Phi_P}{dn} ds - \int_{\Gamma} \frac{d\Phi_L}{dn} ds \quad (72)'$$

Dans la pratique, on mesure le débit de l'électrode émettrice lors de la résolution de l'équation $\Delta \Phi_L = 0$ au réseau électrique. Soit i_L ce débit.

On règle alors la valeur du paramètre J_0 de telle sorte que le débit i_{φ} de l'émetteur satisfasse à la condition :

$$i_{\varphi} = - i_L \quad (73)$$

lorsque l'on traite l'équation (70)

$$\Delta \varphi = - k\rho/\epsilon_0 \quad (70)$$

Il vient alors :

$$\mathcal{L}_p = 0$$

L'équation (72)' se trouve ainsi satisfaite d'une façon approximative, mais suffisante.

Les débits mesurés au réseau électrique sont indiqués dans le tableau XI.

La saturation se traduisant par une condition aux limites assez sévère, les dérivées partielles $\frac{\partial \Phi}{\partial r}$ et $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$ sont faibles au voisinage de l'électrode émettrice. Afin d'avoir des grandeurs Φ , $\frac{\partial \Phi}{\partial r}$ et $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$ continues dans ce domaine, une extrapolation parabolique est pratiquée à partir des valeurs obtenues au réseau électrique.

Sur les planches IV₁₃ et IV₁₄ sont tracés les réseaux de trajectoires relatifs aux seconde et troisième approximations.

Les planches IV₁₆, IV₁₇, IV₁₈ et IV₁₉ donnent la répartition du potentiel φ , créé par la charge d'espace, au cours des diverses approximations.

Les figures 37 et 38 montrent les courbes équipotentiellles Φ et les trajectoires correspondant à la quatrième approximation. La densité d'émission ionique trouvée ($j_0 = 15,25 \text{ A/m}^2$) par ce procédé itératif est voisine de celle obtenue à l'aide de la méthode N°1. Il est probable également qu'une approximation supplémentaire aurait permis de perfectionner la convergence.

Les figures 39 et 40 soulignent l'influence de la charge d'espace sur la répartition des lignes équipotentiellles et sur la forme des trajectoires. Les deux effets de la charge d'espace qui se traduisent par une augmentation de l'angle d'ouverture du faisceau (fig. 40) et la création d'un champ électrique axial E'_z opposé

au champ accélérateur (fig.39) sont nettement visibles.

Les valeurs du potentiel Φ , satisfaisant à l'équation de POISSON et correspondant à la quatrième approximation, sont reproduites dans un tableau (Champ II).



C H A P I T R E V

ESTIMATION DES ERREURS

Les analogies se divisent en deux grandes catégories : analogies fonctionnelles et analogies topologiques. Certains types d'erreurs sont communs : affichage, lecture, calculs auxiliaires. Les analogies topologiques, auxquelles se rattache la présente étude, peuvent de plus entraîner certaines erreurs de représentation du domaine : limitation matérielle lorsque ce domaine est théoriquement infini; erreurs de découpage, qui concernent tout l'espace utile dans le cas des réseaux, et uniquement les conditions aux limites dans le cas des analogies rhéoelectriques. Examinons donc successivement les différentes causes d'erreurs.

5.1 - Erreurs liées au réseau :

5.1.1 - Erreurs de découpage : L'équation de Poisson :

$$\Delta\Phi = -k\rho/\epsilon_0 \quad (68)$$

où les dérivées partielles sont remplacées par des différences finies, donne en chaque noeud du réseau :

$$\sum_{j=1}^{j=4} C_j (\Phi_j - \Phi_0) + i_0 + \mathcal{R}_0 = 0 \quad (74)$$

$\mathcal{R}_0$ désignant l'erreur due à l'introduction des différences finies et qui s'exprime sous forme d'une série de termes fonctions des dérivées de Φ , d'ordre plus ou moins élevé. C'est ainsi que dans le cas d'un maillage régulier de pas Δz et Δr l'expression (74) s'écrit :

$$\beta r \Delta r^2 \Delta\Phi_0 + i_0 + \frac{\beta}{6} \Delta r^2 \left\{ \Delta r^2 \left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial r^3} \right)_0 + \frac{1}{2} \Delta r^2 r \left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial r^4} \right)_0 + \frac{1}{2} \Delta z^2 r \left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial z^4} \right)_0 \right\} + \dots = 0 \quad (75)$$

$$\text{puisque } C_r = \beta r \quad (16) \text{ et } C_z = \beta r \frac{\Delta r^2}{\Delta z^2} \quad (17)$$

Soit encore :

$$\Delta\Phi_o + \frac{i_o}{\beta r \Delta r^2} + \frac{\Delta r^2}{6} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial r^3} \right)_o + \frac{1}{12} \left\{ \Delta r^2 \left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial r^4} \right)_o + \Delta z^2 \left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial z^4} \right)_o \right\} + \dots = 0 \quad (76)$$

L'erreur $\mathcal{R}_o$ se met donc sous la forme :

$$\mathcal{R}_o = \frac{\Delta r^2}{6} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial r^3} \right)_o + \frac{1}{12} \left\{ \Delta r^2 \left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial r^4} \right)_o + \Delta z^2 \left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial z^4} \right)_o \right\} + \dots \quad (77)$$

De même, dans le cas d'un découpage (fig. 41) tel que :

$$\begin{aligned} \Delta r_2 &= \Delta r_4 = \Delta r \\ \Delta z_3 &= \frac{\Delta z_1}{2} = \frac{\Delta z}{2} \end{aligned} \quad (78)$$

les formules (53) deviennent :

$$\left\{ \begin{aligned} C_1 &= C_o \frac{\Delta r}{\Delta z} r \\ C_2 &= \frac{3 C_o \Delta z}{4 \Delta r} \left(r + \frac{\Delta r}{2} \right) \\ C_3 &= \frac{2 C_o \Delta r}{\Delta z} r \\ C_4 &= \frac{3 C_o \Delta z}{4 \Delta r} \left(r - \frac{\Delta r}{2} \right) \end{aligned} \right. \quad (79)$$

L'équation (74) se transforme suivant :

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} C_o r \Delta r \Delta z \Delta\Phi_o + i_o + \frac{C_o r}{8} \Delta r \Delta z \left\{ \Delta z \left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial z^3} \right)_o + \frac{\Delta r^2}{r} \left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial r^3} \right)_o \right\} \\ + \frac{C_o r \Delta r \Delta z}{16} \left\{ \frac{3}{4} \Delta z^2 \left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial z^4} \right)_o + \Delta r^2 \left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial r^4} \right)_o \right\} + \dots = 0 \end{aligned} \quad (80)$$

La comparaison avec l'équation de Poisson (68) donne :

$$i_o = \frac{3 C_o r \Delta r \Delta z k p}{4 \epsilon_o} \quad \text{avec} \quad C_o = \frac{\beta \Delta r}{\Delta z}$$

.../...

résultat conforme à la formule (54).

(81)

$$\text{et : } \mathcal{R}_0 = -\frac{1}{6} \left\{ \frac{\Delta r^2}{r} \left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial r^3} \right)_0 + \Delta z \left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial z^3} \right)_0 \right\} + \frac{1}{12} \left\{ \frac{3}{4} \Delta z^2 \left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial z^4} \right)_0 + \Delta r^2 \left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial r^4} \right)_0 \right\} + \dots = 0$$

Dans cette étude, l'erreur $\mathcal{R}_0$ est toujours du troisième ordre. L'utilisation de mailles très petites permet de ramener cette erreur à des proportions très faibles. Le test qui consiste à étudier, dans la partie du réseau ne comportant pas d'électrodes, la répartition du potentiel dans un condensateur cylindrique coaxial a permis de déceler des erreurs inférieures à 0.1 % en chaque noeud, (la méthode des résistances vraies suppléant celle des différences finies au voisinage de l'axe) bien que les résistances du réseau soient affichées à 0.5 %.

En résolvant le système des N équations (74), où l'on a fait $\mathcal{R}_0 = 0$ (N étant le nombre total de noeuds), à l'aide d'un réseau de conductances, les solutions Φ_0 apparaissent sous forme de tensions électriques. En fait, la précision sur Φ , de l'ordre de quelques millièmes, est limitée, moins par le nombre de noeuds nécessaires ou la précision des résistances employées, que par les difficultés qui peuvent être rencontrées dans l'imposition des conditions aux limites. Alors que dans une cuve électrolytique ou sur un papier conducteur, les contours où ces dernières doivent être satisfaites, en chaque point, sont représentables d'une façon continue, la reproduction au réseau d'une frontière ne s'effectue qu'approximativement à l'aide d'une suite finie de points, ce qui diminue déjà la précision. De plus, l'équation de Poisson (68) traduite sous forme de différences finies, n'est vérifiée au voisinage d'une électrode qu'avec une certaine erreur $\mathcal{R}_0$ (fig. 42) :

$$\mathcal{R}_0 = a_1 \frac{\partial \Phi}{\partial r} + a_2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right) + a_3 b_1 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \dots \quad (82)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = \frac{\Delta r_2 - \Delta r}{\Delta r^2} \\ a_2 = \frac{\Delta r_2^2 - \Delta r^2}{2 \Delta r^2} \\ b_1 = \frac{\Delta r_2^2 + \Delta r_2 \Delta r + \Delta r^2}{4 r} \end{array} \right. \quad (83)$$

les conductances aboutissant au noeud 0 ayant pour expression :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 = C_0 \frac{\Delta r}{\Delta z_1} r \\ C_2 = C_0 \frac{(\Delta z_1 + \Delta z_3)}{2 \Delta r} \left(r + \frac{\Delta r_2}{2} \right) \\ C_3 = C_0 \frac{\Delta r}{\Delta z_3} r \\ C_4 = C_0 \frac{(\Delta z_1 + \Delta z_3)}{2 \Delta r} \left(r - \frac{\Delta r}{2} \right) \end{array} \right. \quad (84)$$

L'erreur $\mathcal{R}_0$, du premier ordre, n'influe que très faiblement sur la répartition des équipotentiellles dans tout le domaine. En effet, pour le vérifier, il suffit de traiter le problème sans charge d'espace, à la cuve de révolution [15]. Le bassin, à fond plan et incliné, représente une tranche comprise entre deux plans méridiens dont l'un correspond au fond de la cuve et l'autre, à la surface libre. L'arête du dièdre liquide ainsi formé donne l'image de l'axe de révolution OZ.

L'inclinaison du fond étant assez faible (20 %) les modèles d'électrodes sont cylindriques et à génératrices verticales; le contour de la section droite du cylindre reproduit la forme du contour méridien de l'électrode (fig. 43). Le relevé du potentiel, fait à la surface libre de l'électrolyte (eau de la ville), en enfonçant

.../...

relativement peu la sonde exploratrice, s'obtient très rapidement à l'aide du traceur automatique d'équipotentiellles (fig.44) mis au point par J. BESSON [17] et M. LANGLOIS [18]. La concordance entre les deux champs Laplaciens (l'un et l'autre étant respectivement simulés au réseau et à la cuve de révolution) s'avère très bonne au voisinage des électrodes.

5.1.2.- Erreurs de limitation matérielle :

La présence des parois introduit une erreur particulièrement compliquée à évaluer. Une coupure électrique provoque une limitation du domaine et joue, de plus, le rôle d'un miroir vis-à-vis des lignes équipotentiellles. La cuve de révolution apporte, à ce sujet, de précieux renseignements. Le choix judicieux des dimensions de modèles permet, compte tenu de celles du bassin incliné (1 m 50 x 1m50), d'agrandir le domaine d'étude et par conséquent de connaître expérimentalement l'erreur due à la limitation du réseau électrique. L'éloignement notable de la paroi de la cuve par rapport à la sortie du canon à ions (figure 44) élimine pratiquement tout risque de trouble dans cette région. Les quatre expériences effectuées (fig.45) a-b-c-d conduisent aux résultats suivants :

a)- La configuration étudiée à la cuve reflète exactement le domaine défini au réseau (fig. 45). La concordance entre les deux champs Laplaciens est excellente.

b)- La suppression de l'isolant B ne provoque qu'un très faible changement dans l'allure des équipotentiellles à la sortie du canon. Cet important résultat permet d'apprécier l'erreur commise par la limitation dans cette région.

./...

c) - L'isolant B rétabli, on enlève l'isolant A (fig. 43 et 44). Cette opération n'introduit aucun trouble notable dans le champ. Cela tient, vraisemblablement, au parallélisme des lignes équipotentielles avec les deux électrodes focalisatrice et accélératrice dans le domaine intéressé.

d) - La suppression des deux isolants A et B perturbe notablement le champ à la sortie du propulseur électrostatique (voir le réseau de courbes sur la planche à tracer fig. 44). Ce cas, purement instructif, ne correspond à aucune réalité physique, le domaine réel étant nécessairement limité dans la région de l'isolant A. Cette perturbation ne se produit, évidemment, que si les courants électriques, circulant dans l'électrolyte, peuvent contourner l'électrode accélératrice.

5.1.3 - Erreurs électriques :

Cette dénomination est réservée uniquement aux erreurs provenant des méthodes de mesures employées. Grâce au quotientmètre V-34 A, qui effectue les relevés de potentiel au 1/10 000, l'erreur devient insignifiante par rapport à l'approximation de principe qu'entraîne l'emploi systématique des grandes résistances et que nous avons examiné au paragraphe 3.4.

5.1.4 - Erreurs de quantification :

Au lieu de varier de manière continue, les grandes résistances sont réalisées sous forme de contacteurs donnant une centaine de valeurs différentes, comprises entre $10^5 \Omega$ et $10^7 \Omega$ ce qui introduit une erreur de quantification.

Les valeurs plus petites que $10^5 \Omega$ sont affichées par adjonction de résistances en parallèle. Si, au contraire, certains noeuds doivent être alimentés par des résistances supérieures à 10^7 ohms, celles-ci peuvent être négligées sans erreur appréciable dans la mesure où l'ensemble du domaine parcouru par les ions est traversé par des intensités suffisantes.

Toutes ces erreurs, sauf celle de limitation matérielle du champ, se retrouvent dans l'étude du problème unidimensionnel. La convergence obtenue par la méthode décrite en 4.1.3. montre un écart de - 0,28 % entre les champs expérimental et théorique. (les grandes résistances étant corrigées suivant le procédé examiné en 3.4). Il semble donc vraisemblable d'estimer l'erreur globale, due à l'utilisation du réseau, comme inférieure à 1 %.

5.2 - Erreurs dues aux calculs sur machines arithmétiques :

La méthode d'intégration de RUNGE-KUTTA qui nécessite la connaissance, en un point du domaine considéré, des grandeurs r , z , r' et r'' n'introduit qu'une erreur insignifiante lorsque le champ Φ ainsi que ses dérivées partielles $\frac{\partial \Phi}{\partial r}$ et $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$ sont parfaitement continus. Pour le vérifier il suffit de se placer dans le cas, particulièrement simple, d'un champ uniforme créé par deux électrodes E et E', planes et parallèles, distantes de d , portées à des potentiels respectifs V_S et 0. (fig. 46). La répartition du potentiel obéit à la loi linéaire :

$$\frac{V}{V_S} = 1 - \left(\frac{x}{d} \right) \quad (85)$$

les coordonnées cartésiennes x et y étant prises respectivement suivant la normale et la tangente à l'électrode E.

.../...

Soit un électron de caractéristiques m et $-e$, issu de l'origine O , de vitesse initiale U_0 .

L'équation fondamentale de la dynamique (8), appliquée à cette particule, donne :

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} = +e \frac{\partial V}{\partial x} = -e \frac{V_s}{d} \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = 0 \end{cases} \quad (86)$$

L'intégration du système d'équations (86) aboutit à :

$$\begin{cases} mx = -\frac{eV_s t^2}{2d} + At + B \\ my = Ct + D \end{cases} \quad (87)$$

pour $t = 0$

$$\begin{cases} x = y = 0 \rightarrow B = D = 0 \\ x' = \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 \text{ et } y' = \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 \rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = \frac{C}{A} \\ U_0^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)_0^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)_0^2 \rightarrow \frac{A^2 + C^2}{m^2} = U_0^2 \end{cases}$$

Il vient :

$$\begin{cases} A = \frac{m U_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0^2}} \\ C = \frac{m U_0 \left(\frac{dy}{dx}\right)_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0^2}} \end{cases} \quad (88)$$

L'élimination du temps entre les équations (87) conduit à l'équation cartésienne de la trajectoire :

$$x = ay^2 + by \quad (89)$$

en posant :

$$\left\{ \begin{array}{l} a = - \frac{e V_s \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)_0^2 \right]}{2 m d U_o^2 \left(\frac{dy}{dx} \right)_0^2} \\ b = \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx} \right)_0} \end{array} \right. \quad (90)$$

Le changement de coordonnées défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = - \frac{b^2}{4a} + X \\ y = - \frac{b}{2a} + Y \end{array} \right. \quad (91)$$

montre que la trajectoire théorique est une parabole :

$$X = a Y^2 \quad (92)$$

L'équation (11), valable en coordonnées cartésiennes où y et x remplacent respectivement r et z , s'écrit :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\} \left(\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{dy}{dx} \frac{\partial V}{\partial x} \right)}{2 \left(V + \frac{m U_o^2}{2e} - V_s \right)} \quad (93)$$

La figure 46 montre diverses trajectoires théoriques confondues avec leurs homologues obtenues par exploitation du champ uniforme sur la calculatrice Gamma AET. La parabole recoupe l'axe des y en un certain point d'ordonnée y_1 . La résolution par machines arithmétiques donne une erreur définie par $\frac{|\Delta y_1|}{y_1}$. Le tableau XII fournit une série de résultats correspondant à une valeur donnée de $\frac{m U_o^2}{2e}$ et à des angles d'entrée dans le champ variables de 10° en 10° . Il apparaît ainsi que les erreurs dues au mode de calcul sur machines arithmétiques sont négligeables.

.../...

5.3 - Erreurs introduites par la méthode de calcul de la charge d'espace :

Soit le tube de courant de la figure 6. La relation (23) établie au paragraphe 1.5. est valable sur toute la surface Σ du volume élémentaire δ .

$$\iint_{\Sigma} \rho \vec{U} \cdot \vec{n} d\sigma = 0 \quad (23)$$

Cette équation (23) se transforme en :

$$\iint_{\Sigma_i} \rho(P_j) \vec{U}(P_j) \vec{n}_j d\sigma_j + \iint_{\Sigma_{i+1}} \rho(P_\ell) \vec{U}(P_\ell) \vec{n}_\ell d\sigma_\ell = 0 \quad (23)'$$

Désignons par $-J_i(P_j)$ et $J_{i+1}(P_\ell)$ ces deux intégrales.

Soit V_j le potentiel électrique en un point P_j de la section Σ_i . (Fig.47).

Par hypothèse l'électrode (E) émet des ions, de caractéristiques m et $+e$, sans vitesse initiale.

$$\text{Donc :} \quad \frac{1}{2} m U_j^2 = e (V_s - V_j)$$

L'intégrale $J_i(P_j)$ s'écrit alors :

$$J_i(P_j) = \iint_{\Sigma_i} \rho(P_j) \sqrt{\frac{2e}{m} (V_s - V_j)} \frac{1}{\sqrt{1+r_j'^2}} d\sigma_j \quad (94)$$

Dans la méthode exposée au paragraphe 1.5., le calcul de l'intégrale J_i s'appuyait sur l'hypothèse de l'uniformité des champs $\vec{U}(P_j)$ et $\rho(P_j)$ dans la section Σ_i .

.../...

D'où :

$$J_i(M_i) = \rho(M_i) \sqrt{\frac{2e(V_s - V_i)}{m(1 + r_i'^2)}} \iint_{\Sigma_i} d\sigma_j \quad (95)$$

Posons :

$$\rho(P_j) = \rho(M_i) + \delta r_j \frac{d\rho}{dr}(M_i) + \frac{1}{2} \delta r_j^2 \frac{d^2\rho}{dr^2}(M_i) \quad (96)$$

Comme $d\sigma_j = 2\pi r_j dr_j$, il vient :

$$\begin{aligned} J_i(P_j) = & 2\pi \rho(M_i) \sqrt{\frac{2e}{m}} \int_{r_{1(i)}}^{r_{3(i)}} \sqrt{\frac{V_s - V_j}{1 + r_j'^2}} r_j dr_j + 2\pi \frac{d\rho}{dr}(M_i) \sqrt{\frac{2e}{m}} \int_{r_{1(i)}}^{r_{3(i)}} \sqrt{\frac{V_s - V_j}{1 + r_j'^2}} \delta r_j r_j dr_j \\ & + \pi \frac{d^2\rho}{dr^2}(M_i) \sqrt{\frac{2e}{m}} \int_{r_{1(i)}}^{r_{3(i)}} \sqrt{\frac{V_s - V_j}{1 + r_j'^2}} \delta r_j^2 r_j dr_j \end{aligned} \quad (97)$$

$$\text{avec} \quad \delta r_j = r_j - r_{2(i)} \quad (98)$$

$$\text{Or} \quad V_j = \frac{V_s}{100} \Phi_j \quad \text{et} \quad \alpha = \sqrt{\frac{2e}{m} V_s} .$$

Donc :

$$J_i(P_j) = \frac{\pi \alpha}{10} \left\{ 2\rho(M_i) K_1 + 2 \frac{d\rho}{dr}(M_i) K_2 + \frac{d^2\rho}{dr^2}(M_i) K_3 \right\} \quad (99)$$

les intégrales K_1 , K_2 , et K_3 s'expriment par :

$$K_\ell = \int_{r_{1(i)}}^{r_{3(i)}} \sqrt{\frac{100 - \Phi_j}{(1 + r_j'^2)}} r_j (\delta r_j)^{\ell-1} dr_j \quad (100)$$

.../...

où $l = 1, 2$ et 3 .

Comme :

$$J_l(M_l) = \frac{\pi \alpha}{10} \rho(M_l) \sqrt{\frac{100 - \Phi_l}{1 + r_l'^2}} (r_3^2 - r_1^2)_l \quad (101)$$

L'erreur commise dans le calcul de la charge d'espace s'écrit donc :

$$E\% = \frac{2K_1 - \textcircled{H}_l}{\textcircled{H}_l} + \frac{2K_2 \frac{d\rho}{dr}(M_l)}{\textcircled{H}_l \rho(M_l)} + \frac{K_3 \frac{d^2\rho}{dr^2}(M_l)}{\textcircled{H}_l \rho(M_l)} \quad (102)$$

en désignant par $\textcircled{H}_l$ le coefficient $\sqrt{\frac{100 - \Phi_l}{1 + r_l'^2}} (r_3^2 - r_1^2)_l$

Deux exemples sont donnés avec le tube de courant défini par les trajectoires 9 et 11 dans le cas du champ Laplacien (problème tridimensionnel à symétrie axiale). Dans les sections $z = 10 \Delta r$ (Tableau XIII) et $z = 2 \Delta r$ (Tableau XIV),

plusieurs trajectoires intermédiaires sont considérées pour le calcul des intégrales K_l . Les résultats numériques démontrent la validité de l'approximation faite dans la détermination de la charge par la méthode exposée au paragraphe 1.5, le nombre $\alpha \rho / j_0$ évoluant assez lentement dans la section $z = 10 \Delta r$ (cas le plus fréquent) et beaucoup plus rapidement dans la section plus proche de l'émetteur.

En résumé, cette étude à priori de la précision, étayée par quelques calculs dans des cas particuliers, conduit à distinguer deux erreurs prédominantes : la première due au principe des grandes résistances est aisément ramenée à un ordre inférieur lorsque les intensités affichées sont "corrigées" (cf. 3.4.), la seconde, agissant sur la détermination des trajectoires et par conséquent sur

.../...

le calcul de la charge d'espace, est due à la continuité du champ et de ses dérivées partielles $\frac{\partial \Phi}{\partial r}$ et $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$. L'importance de l'extrapolation parabolique décrite en 2.2.1. se justifie donc par son incidence sur les calculs auxiliaires automatiques (calculatrice arithmétique) et numériques (charge d'espace).

En réduisant les deux erreurs prépondérantes, il paraît vraisemblable d'estimer l'erreur globale de 1 à 2 %.

.../...

C O N C L U S I O N

- - - - -

L'association du réseau électrique et des calculatrices arithmétiques, pour la recherche d'une configuration d'électrodes focalisatrice et accélératrice adaptée à un générateur d'ions, permet de résoudre l'équation de POISSON $\Delta V = -\rho/\epsilon_0$ qui relie le potentiel électrique à la charge d'espace dans un propulseur ionique.

Les trajectoires correspondant à la carte des potentiels relevés au réseau, en un nombre fini de points, sont déterminées à l'aide de la méthode d'intégration du quatrième ordre de RUNGE-KUTTA, adaptée sur calculatrices arithmétiques.

Le découpage du faisceau ionique, en un certain nombre de tubes de courant élémentaires, permet le calcul de la charge d'espace de proche en proche. Celle-ci est simulée par une injection de courant en chaque noeud d'un réseau constitué par des résistances pures.

La résolution de l'équation de POISSON par cette méthode itérative aboutit à une convergence satisfaisante dès la quatrième approximation.

La distribution du potentiel qui satisfait à la condition d'annulation du champ électrique à la surface de l'émetteur est obtenue par trois méthodes éprouvées sur le cas théorique de la diode plane. Les résultats montrent que le faisceau ionique possède les qualités optiques souhaitées.

La répartition du potentiel qui vérifie l'équation de LAPLACE s'obtient aisément au bassin rhéoelectrique quelles que soient les formes d'électrodes adoptées et les tensions imposées. Son étude, au voisinage de l'axe, pouvant se ramener à un problème unidimensionnel aboutit, à la fin du cycle d'approximations, à une configuration du potentiel assez éloignée de la réalité. En effet, des expériences ont été effectuées sur le réseau électrique, d'après les valeurs du potentiel analogique Φ_L sur l'axe du propulseur

(champ I et Fig.49) et d'après la charge d'espace calculée dans le tube élémentaire ($\mathcal{D}$) (Fig. 48.a) en assimilant les surfaces équipotentiellles à des plans orthogonaux à l'axe OZ . Ces expériences reposent sur l'hypothèse assez grossière qui transforme la figure 48.a en 48.b. Une telle approximation qui remplace la fonction ρ , variable dans le plan $Z = Z_L$ et qui s'annule à l'extérieur du faisceau ionique, par une constante ρ_L , conduit à une distribution du potentiel sur l'axe, après convergence du procédé itératif, nettement différente de celle figurant sur le champ II. Il paraît donc difficile de dégager des conclusions définitives à la lumière de la seule répartition du potentiel Laplacien Φ_L sur l'axe de révolution du système.

Toutefois, l'examen des lignes équipotentiellles, des lignes de courant et surtout des trajectoires obtenues, les unes au bassin rhéoelectrique, les autres par une des méthodes signalées dans l'introduction, permet de tirer d'utiles indications sur la forme du faisceau définitif. L'influence de la charge d'espace, avec la forme des électrodes reproduite fig.29 et la répartition du potentiel sur l'axe qui en résulte (fig.49), se traduit par une largeur du faisceau (à la convergence), au droit de l'électrode de sortie du canon ionique, égale à 2,09 fois celle correspondant au champ Laplacien, le maximum d'épanouissement du faisceau ayant lieu évidemment lors de la première approximation (pour les méthodes N°2 et N°3) et étant caractérisé par le coefficient 2,58.

La charge d'espace provoquant une augmentation de l'angle d'ouverture du faisceau, il est indispensable que les trajectoires, calculées en la négligeant, convergent très fortement vers l'axe de révolution du tube à vide, ce qui exclut, à priori, toute surface émettrice dont la concavité n'est pas dirigée vers les Z positifs.

La méthode de calcul analogique décrite peut être aisément généralisée quelles que soient les caractéristiques géométriques et électriques du propulseur ainsi que les conditions initiales imposées aux particules électriques.

A N N E X E I

METHODE DES RESISTANCES VRAIES
ET DU CYLINDRE CREUX

En respectant les notations de J. MIROUX [8], la figure 50 représente un onglet découpé par deux plans méridiens dans un cylindre ainsi qu'une partie du réseau (résistances disposées suivant le rayon vecteur).

Par définition, la valeur vraie R_V d'une résistance R_r correspond à l'intégration d'une couronne d'épaisseur dr

$$R_{V_n} = \int_{\rho_{n-1}^*}^{\rho_n^*} \frac{dr}{2\pi r} = \frac{1}{2\pi} \text{Log} \frac{\rho_n^*}{\rho_{n-1}^*} \quad (103)$$

Pour un maillage régulier il vient :

$$R_{V_n} = \frac{1}{2\pi} \text{Log} \frac{n}{n-1} \quad (104)$$

La résistance R_1 est infinie. A priori il apparaît que la difficulté s'est accrue. Néanmoins il est évident [8] que R_V est la seule valeur qui donnera à chaque noeud la répartition exacte des tensions et des courants en régime permanent.

L'étude entreprise nécessitant une bonne précision au voisinage de l'axe, l'artifice du cylindre creux (le cylindre présentant le long de son axe un espace vide de très petit rayon r_0) permet de donner une valeur finie aux résistances R_1 (comme dans le cas de la méthode des différences finies) ainsi qu'aux résistances, placées le long du pseudo axe, qui seront alors égales à :

$$R_z = \frac{\Delta z^2}{\Delta r^2} \frac{1}{\beta r_0}$$

Cet artifice ayant été adopté, il a fallu déterminer la valeur du rayon r_0 . Celui-ci permet, tout en utilisant la méthode des valeurs

.../...

vraies, de trouver des valeurs de résistances coïncidant avec celles de la méthode des différences finies à partir d'un certain rayon r_ℓ choisi à l'avance.

Pour ce faire, soit un cylindre de révolution (fig. 51) infiniment long, creux, composé de deux armatures, définies par les rayons r_0 et r_1 et portées respectivement aux potentiels analogiques + 100 et 0. Si ℓ désigne la longueur du cylindre et Q sa charge, la distribution de potentiel à la distance r de l'axe obéit à la loi :

$$100 - \Phi(r) = \frac{2Q}{\epsilon_0 \ell} \text{Log} \frac{r}{r_0} \quad (105)$$

avec $\Phi(r_1) = 0$

Posons :

$$r_1 = 10 \Delta r$$

$$r_0 = k_0 \Delta r \text{ avec } 0 < k_0 < 1$$

D'où :

$$100 = \frac{2Q}{\epsilon_0 \ell} \text{Log} \frac{10}{k_0}$$

L'équation (105) se transforme suivant :

$$100 - \Phi(r) = \frac{100}{\text{Log} \frac{10}{k_0}} \text{Log} \frac{r}{r_0} \quad (105)'$$

Deux méthodes différentes de calcul de r_0 sont susceptibles d'être appliquées.

- Méthode numérique :

Les conductances C_z s'obtiennent en attribuant à r des valeurs égales à des multiples du maillage Δr sauf pour la première ligne où $r = k_0 \Delta r$ (pour la seconde ligne $r = \Delta r$, pour la $n^{\text{ème}}$ ligne $r = (n-1) \Delta r$). Par contre les conductances C_r

se calculent par la méthode des différences finies en considérant le milieu (cf. fig. 50) de chaque maille (pour R_1 , $r = \frac{\Delta r}{2}$; pour R_2 , $r = \frac{3}{2} \Delta r$, pour R_n , $r = \frac{(2n-1)}{2} \Delta r$).

Toutes les conductances étant définies à un facteur β près, tous les calculs et expériences sont effectués avec :

$$\beta \Delta r = 10^{-4}$$

En appliquant la méthode des différences finies depuis l'axe ($r = 0$), les résistances R_r prennent les valeurs indiquées dans le tableau I.

Imposons un potentiel analogique égal à + 100 sur l'axe et à zéro sur le noeud défini par $r = r_1$, l'intensité analogique qui circule dans la "ligne" vaut :

$$i = \frac{100}{\sum_{n=1}^{n=10} R_n}$$

Ayant adopté $r_l = 5 \Delta r$ il vient :

$$\Phi(r_l) = \frac{100}{\sum_{n=1}^{n=10} R_n} \cdot \sum_{n=6}^{n=10} R_n = 16,217$$

L'équation (105)' s'écrit alors :

$$83,783 = \frac{100 (\log 5 - \log k_0)}{(1 - \log k_0)}$$

$$\text{D'où : } \log k_0 = \bar{1},14374$$

$$\text{et } k_0 = 0,13923$$

(106)

- Méthode graphique :

Appliquons maintenant la méthode des différences finies depuis le pseudo-axe ($r = r_0$). Seule la résistance R_1 est modifiée. En raisonnant de la même manière que précédemment il vient :

$$L = \frac{100}{\sum_{n=2}^{n=10} R_n + \frac{2 \cdot 10^4}{1 - k_0}}$$

De même :

$$\Phi(r_e) = \frac{100}{\sum_{n=2}^{n=10} R_n + \frac{2 \cdot 10^4}{1 - k_0}} \sum_{n=6}^{n=10} R_n$$

D'où :

$$100 - \frac{100 \sum_{n=6}^{n=10} R_n}{\sum_{n=2}^{n=10} R_n + \frac{2 \cdot 10^4}{1 - k_0}} = \frac{100 (\log 5 - \log k_0)}{1 - \log k_0}$$

Soit :

$$\frac{6919,1 (1 - k_0)}{42665 - 22665 k_0} = \frac{1 - \log 5}{1 - \log k_0}$$

$$\text{Posons : } \begin{cases} x = k_0 \\ y = \log k_0 \end{cases}$$

il vient :

$$y = 1 + \frac{0,98609 x - 1,85623}{1 - x} \quad (107)$$

L'équation (107) représente une hyperbole équilatère $y_1(x)$ (voir tableau II). Il suffit d'en chercher l'intersection avec la courbe $y_2 = \log x$ pour obtenir la valeur de k_0 désirée (cf. tableau III et planche I).

Cette méthode graphique permet d'aboutir à :

$$k_0 = 0,109 \quad (108)$$

CONCLUSION :

Les deux méthodes conduisent donc à des valeurs de k_0 égales à 0,139 et 0,109. Il ne semble pas, d'après les expériences effectuées que l'une ou l'autre soit préférable. Leur utilisation est donc laissée au choix de l'expérimentateur.

.../...

A N N E X E II

ETUDE DES TRAJECTOIRES PAR LA
THEORIE DES DISTRIBUTIONS

La fonction potentiel analogique, dans deux sections r_j et z_{ej} au voisinage de l'émetteur (cas le plus critique) est Φ telle que :

$$\begin{aligned}\Phi &= \Phi_1 \quad \text{pour } z \geq z_{ej} \quad \text{et} \quad 0 \leq r \leq r_j \\ \Phi &= \Phi_2 = \Phi_e \quad \text{pour } 0 \leq z \leq z_{ej} \quad \text{et} \quad r_j \leq r \leq \frac{D}{2}.\end{aligned}$$

avec $\Phi_1(r_j, z_{ej}) = \Phi_2(r_j, z_{ej}) = \Phi_e$. (fig. 52)

L'extrapolation parabolique conduit à une nouvelle fonction Φ^* , continue à la frontière de l'électrode, et telle que :

$$\begin{aligned}\Phi^* &= \Phi_1 \quad \text{pour } z \geq z_{ej} \quad \text{et} \quad 0 \leq r \leq r_j \\ \Phi^* &= \Phi_3 \quad \text{pour } 0 \leq z \leq z_{ej} \quad \text{et} \quad r_j \leq r \leq \frac{D}{2}.\end{aligned}$$

$$\text{avec } \Phi_1(r_j, z_{ej}) = \Phi_3(r_j, z_{ej}) = \Phi_e$$

$$\text{et } \begin{aligned}\frac{\partial \Phi_1}{\partial z}(r_j, z_{ej}) &= \frac{\partial \Phi_3}{\partial z}(r_j, z_{ej}) \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial r}(r_j, z_{ej}) &= \frac{\partial \Phi_3}{\partial r}(r_j, z_{ej})\end{aligned}$$

Soit $f(x_i)$ une fonction indéfiniment dérivable dans le complémentaire d'une hypersurface régulière (S), et telle que chaque dérivée partielle ait une limite de part et d'autre de (S), en chaque point de (S). La différence entre ces limites est le "saut" de la dérivée partielle correspondante. Celui-ci est déterminé pour un sens fixé de "traversée" de la surface (S), et change de signe lorsqu'on modifie le sens de cette traversée. Ce saut est une fonction définie sur la surface (S).

Appelons $D^p f$ une dérivée de f au sens des distributions, et $\{D^p f\}$ la distribution représentée par la fonction dérivée

.../...

usuelle, définie pour $x \notin (S)$ et non définie pour $x \in (S)$.
On montre que :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\} + (\sigma_0 \cos \theta_i) \delta_{(s)} \quad (109)$$

et :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \right\} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(\sigma_0 \cos \theta_i) \delta_{(s)} \right] + \sigma_i \cos \theta_i \delta_{(s)} \quad (110)$$

avec :

θ_i : angle de l'axe des x_i avec la normale à (S) dans le sens de traversée correspondant à la croissance de x_i (fig. 53).

σ_0 : discontinuité de f lorsqu'on traverse (S) dans le sens de l'axe des x_i .

σ_i : saut de $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ à la traversée de (S)

$(\sigma_0 \cos \theta_i) \delta_{(s)}$: notation symbolique de la distribution correspondant à des masses placées sur (S) avec la densité superficielle $\sigma_0 \cos \theta_i$.

La surface émettrice joue le rôle de la surface (S) dans le cas considéré.

Les discontinuités de Φ lorsqu'on traverse (S) dans le sens des axes r et z sont nulles. Donc $\sigma_{or} = \sigma_{oz} = 0$.

$$\text{Par contre : } \sigma_{ir} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} (r_j, z_{ej})$$

$$\sigma_{iz} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} (r_j, z_{ej})$$

puisque

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial r} (r_j, z_{ej}) = \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} (r_j, z_{ej}) = 0$$

.../...

Dans le domaine défini par $z \geq z_{ej}$ et $0 \leq r \leq r_j$ nous avons, par application de la formule (109) :

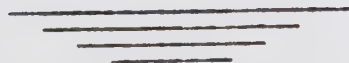
$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} - r' \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \left\{ \frac{\partial \Phi^*}{\partial r} \right\} - r' \left\{ \frac{\partial \Phi^*}{\partial z} \right\}$$

Par suite, l'équation différentielle (20) prend la forme :

$$r'' = \frac{(1 + r'^2) \left[\left\{ \frac{\partial \Phi^*}{\partial r} \right\} - r' \left\{ \frac{\partial \Phi^*}{\partial z} \right\} \right]}{2 (\Phi^* + V)} \quad (111)$$

Il en résulte que les trajectoires ioniques ne sont nullement modifiées au voisinage de l'émetteur par la présence des discontinuités σ_{1r} et σ_{1z} sur les dérivées partielles du premier ordre du champ Φ . L'extrapolation parabolique, à condition qu'elle soit réalisée avec le plus grand soin, en éliminant ces discontinuités et en respectant le champ dans le domaine $z \geq z_{ej}$ et $0 \leq r \leq r_j$, permet un calcul correct des fonctions $\frac{\partial \Phi}{\partial r}$ et $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$ et par suite de l'expression (20).

Dans la pratique, une seule extrapolation est bien souvent suffisante. Le choix de celle-ci est primordial et elle engendre, presque toujours, un champ parfaitement continu dans l'autre section.



- REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES -

- [1] - R. MUSSON-GENON - Application des méthodes rhéographiques à l'étude des trajectoires électroniques planes compte tenu de la charge d'espace.
Annales des Télécommunications. Tome 2 - Nos. 8, 9, 10 - 1947.

- [2] - LAPOSTOLLE - Les effets de la charge d'espace dans les canons à électrons.
PICQUENDAR Etude C.N.E.T. N° 432 PDT.
CAHEN

- [3] - R. FOX - Physics of the ion thrust system American Rocket Society 14 th Annual Meeting 1959.

- [4] - G.R. BREWER - Design and performance of small model ion engines.
J.E. ETTER and A.R.S. May 1960.
J.R. ANDERSON

- [5] - J. MARVAUD - Traceurs automatiques de trajectoires utilisant le bassin électrique. Thèse de Doctorat. (Juillet 1953).

- [6] - J.R. PIERCE - Theory and design of electron beams.
Second Edition. D. Van Nostrand Company, Inc 1954.

- [7] - E. PERSICO - Il novo cimento vol IX n°1, 1/1952.

- [8] - J. MIROUX - Sur un nouvel analyseur analogique de régimes transitoires - Application à l'étude de certains phénomènes de régime variable.
Publication O.N.E.R.A. n° 81 (1955).

- [9] - F.B. HILDEBRAND - Introduction to numerical analysis -
Mc. Graw-Hill Book Company, Inc 1956.
- [10] - H. MINEUR - Techniques de calcul numérique.
Librairie Polytechnique Ch. Béranger (1952)
- [11] - P. HUARD DE LA MARRE - Résolution de problèmes d'infiltrations à
surface libre au moyen d'analogies électri-
ques. Thèse de Doctorat Juin 1956.
- [12] - L. SCHWARTZ - Théorie des distributions Tomes I et II.
Act. Scient et Industr. HERMANN 1950.
- [13] - W.J. KARPLUS - Analog Simulation. Solution of field problems
Mc Graw-Hill Book Company, Inc 1958.
- [14] - R. DUQUENNE - Etude, par analogie électrique, des surfaces
portantes en régime instationnaire.
Thèse de Doctorat, Mai 1960.
- [15] - L. MALAVARD - L'emploi des analogies rhéoélectriques en
aérodynamique. Agardograph 18 - Août 1956.
- [16] - M. BAYET - Physique Electronique des gaz et des Solides.
Masson.
- [17] - J. BESSON - Traceur pour cuves rhéoélectriques -
La Recherche Aéronautique n°82, Mai-Juin 1961.
- [18] - M. LANGLOIS - Traceur automatique de lignes équipotentiel-
les. Système de commutation du rôle des
variables. Etude 1514 AP (Note Intérieure).
- [19] - KIRCHHOFF - Zur Theorie des Condensators (Berlin ,
Monatsberichte 1878 p. 144-162).

- [20] - F. GRAY

- Theory of electrostatic fields as lenses for electron beams in systems where the fields are symmetrical about a central axis - The Bell System Technical Manual, Janvier 1939 t. 18, p. 1-29.
- [21] - J.D. COCKROFT

- The effect of curved boundaries on the distribution on electric stress round boundaries Journal I.E.E. t.66 (1928) p. 385-409.
- [22] - J. KUCERA

- Répartition des flux magnétiques dans les statots et rotors R.G.E. t.27 (1930) p. 645-657.
- [23] - R. DUCHON

- Etude du potentiel créé par deux cylindres coaxiaux égaux portant des charges égales et opposées. Les Cahiers de Physique - Décembre 1943 -
- [24] - BALACHOWSKY

- Note sur un tracé de champs électriques - Bulletin de la Société Française des Electriciens. N° 58 (Avril 1946) p. 181-186.
- [25] - M. FROCHT

- The numerical solution of Laplace's equation in composite rectangular areas - Journal of Applied Physics, vol 17 (Septembre 1946) p. 730-742.
- [26] - T. LEHMANN

- Détermination graphique des champs magnétiques laplaciens et tourbillonnaires à lignes de flux planes R.G.E. t. 14 (1923) p. 347-357, 395-403.

- [27] - GABOR - Mechanical Tracer for Electron Trajectories.
Nature t. 39 (Février 1937).
- [28] - LANGMUIR - Automatic Plotting of Electron Trajectories.
Nature t. 39 (1937) p. 1066.
- [29] - L. MELIN - La Propulsion Electrique - Journées d'Information
Aéronautique - Mai-Juin 1960 (ENSA).
- [30] - R.N. EDWARDS et - Recherches sur les fusées à ions de césium.
G. KUSKEVICS "ASME (59 - AV - 32)" - Mars 1959.
- [31] - A.T. FORRESTER - Propulsion par ions de césium
and R.C. SPEISER Astronautics - Octobre 1959.

TABLEAU I

Résistances R_r en Ω		Résistances vraies
R_1	20.000	19.997
R_2	6.666,6	6.931
R_3	4.000	4.054
R_4	2.857,1	2.876
R_5	2.222,2	2.231
R_6	1.818,2	1.818,2
R_7	1.538,5	1.538,5
R_8	1.333,3	1,333,3
R_9	1.176,5	1,176,5
R_{10}	1.052,6	1.052,6
$\sum_{n=1}^{n=10} R_n = 42.665$		

TABLEAU II

x	-0,50	-0,20	0	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	1
y_1	-0,566	-0,711	-0,856	-0,953	-1,074	-1,229	-1,436	-1,726	-2,161	-2,887	-4,337	$-\infty$

TABLEAU III

x	0	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,30	0,50	0,70	0,85	1
y_2	$-\infty$	-2	-1,301	-1	-0,824	-0,699	-0,523	-0,301	-0,155	-0,071	0

TABLEAU IV

Diode : méthode n°1 $J_0 = 47,38 \text{ A/m}^2$															
Φ Z/d	0	0.005	0.010	0.015	0.020	0.025	0.0375	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	
Approximation 0	100	99,50	99,00	98,50	98,00	97,50	96,245	94,995	89,99	84,995	79,99	74,99	69,99	64,99	
Approximation 1	100	99,78	99,54	99,29	99,03	98,76	98,04	97,29	94,02	90,39	86,49	82,33	77,95	73,38	
Approximation 2	100	99,85	99,68	99,49	99,28	99,06	98,46	97,82	94,84	91,41	87,64	83,57	79,22	74,66	
Approximation 3	100	99,89	99,74	99,57	99,38	99,18	98,62	98,01	95,11	91,73	87,98	83,90	79,56	74,99	
Approximation 4	100	99,90	99,76	99,60	99,42	99,23	98,68	98,08	95,19	91,83	88,08	84,00	79,66	75,08	
Loi de Child	100	99,915	99,785	99,63	99,46	99,27	98,745	98,16	95,36	92,03	88,305	84,25	79,92	75,34	

Φ Z/d	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1	$\epsilon \%$
Approximation 0	59,99	54,99	49,99	44,99	39,99	34,995	30,00	25,00	20,00	15,00	10,00	5,00	0	-12,49
Approximation 1	68,60	63,67	58,565	53,32	47,92	42,37	36,69	30,88	24,95	18,89	12,69	6,41	0	-2,08
Approximation 2	69,88	64,90	59,735	54,40	48,90	43,26	37,47	31,54	25,48	19,29	12,97	6,54	0	-0,72
Approximation 3	70,19	65,19	59,995	54,65	49,13	43,46	37,64	31,69	25,60	19,38	13,04	6,58	0	-0,38
Approximation 4	70,28	65,27	60,075	54,72	49,19	43,50	37,69	31,73	25,63	19,40	13,05	6,58	0	-0,28
Loi de Child	70,53	65,52	60,365	54,95	49,395	43,695	37,855	31,86	25,735	19,48	13,11	6,615	0	

TABLEAU V

	1 ^{re} Approximation				2 ^{me} Approximation				3 ^{me} Approximation					4 ^{me} Approximation					
Densité d'émission J_0 (A/m ²)	$R_\varphi^*(\Omega)$	i_φ	i_P/i_L %	ε %	$R_\varphi^*(\Omega)$	i_φ	i_P/i_L %	ε %	$R_\varphi^*(\Omega)$	i_φ	i_P	i_P/i_L %	ε %	$R_\varphi^*(\Omega)$	i_φ	i_P	i_P/i_L %	ε %	$\left(\frac{i_{P_3}-i_{P_4}}{i_L}\right)$ %
35	24.642	- 4,058	59,425	- 4,75	21.121	- 4,735	52,655	- 4,075	20.488	- 4,881	5,120	51,195	- 3,96	20.383	- 4,906	5,095	50,945	- 3,94	0,25
40	21.687	- 4,611	53,895	- 3,64	17.940	- 5,574	44,265	- 2,74	17.165	- 5,826	4,175	41,745	- 2,55	16.940	- 5,903	4,098	40,975	- 2,54	0,77
45,5	19.029	- 5,255	47,455	- 2,45	15.280	- 6,5445	34,56	- 1,245	14.219	- 7,033	2,968	29,68	- 0,99	13.820	- 7,236	2,765	27,65	- 0,905	2,03
47,38	18.344	- 5,451	45,495	- 2,08	14.459	- 6,916	30,85	- 0,72	13.270	- 7,536	2,465	24,65	- 0,38	12.780	- 7,825	2,176	21,76	- 0,28	2,89
49	17.719	- 5,644	43,565	- 1,715	13.815	- 7,2385	27,62	- 0,27	12.549	- 7,969	2,032	20,32	+ 0,095	11.931	- 8,3815	1,6195	16,195	+ 0,275	4,125
51	17.037	- 5,8695	41,31	- 1,30	13.118	- 7,623	23,78	+ 0,30	11.713	- 8,5375	1,4635	14,635	+ 0,765	10.774	- 9,2815	0,7195	7,195	+ 0,97	7,44

TABLEAU VI

Diode : méthode n° 2 $J_0 = 10 \text{ A/m}^2$															
Φ \ z/d	0	0.005	0.010	0.015	0.020	0.025	0.0375	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	
Approximation 0	100	99,50	99,00	98,50	98,00	97,50	96,245	94,995	89,99	84,995	79,99	74,99	69,99	64,99	
Approximation 1	100	[*] 99,9985	99,98	99,92	99,86	99,79	99,54	99,21	97,355	94,88	91,905	88,47	84,62	80,425	
Approximation 2	100	[*] 99,955	99,83	99,62	99,38	99,13	98,43	97,675	94,19	90,295	86,115	81,705	77,10	72,33	
Approximation 3	100	[*] 99,98	99,925	99,83	99,715	99,575	99,155	98,68	96,21	93,145	89,645	85,785	81,60	77,11	
Approximation 4	100	[*] 99,99	99,925	99,805	99,66	99,50	99,02	98,47	95,69	92,355	88,605	84,53	80,16	75,545	
Loi de Child	100	99,915	99,785	99,63	99,46	99,27	98,745	98,16	95,36	92,03	88,305	84,25	79,92	75,34	

Φ \ z/d	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1	$\varepsilon \%$
Approximation 0	59,99	54,99	49,99	44,99	39,99	34,995	30,00	25,00	20,00	15,00	10,00	5,00	0	- 12,49
Approximation 1	75,88	71,01	65,82	60,34	54,59	48,59	42,34	35,84	29,095	22,14	14,97	7,59	0	+ 6,67
Approximation 2	67,405	62,34	57,16	51,87	46,465	40,96	35,36	29,67	23,895	18,04	12,095	6,09	0	- 3,73
Approximation 3	72,375	67,385	62,19	56,775	51,17	45,37	39,375	33,21	26,88	20,38	13,725	6,935	0	+ 2,32
Approximation 4	70,705	65,665	60,44	55,035	49,465	43,74	37,87	31,865	25,73	19,47	13,09	6,60	0	+ 0,16
Loi de Child	70,53	65,52	60,365	54,95	49,395	43,695	37,855	31,86	25,735	19,48	13,11	6,615	0	

* Valeurs obtenues par interpolation parabolique.

TABLEAU VII

	J_0 A/m^2	$R^2 \Omega$	i_φ	i_p/i_L	$\varepsilon\%$	Erreurs maximales + -	
1 ^{re} Approximation	87,50	10.019	- 9,981	+ 0,19	+ 6,53	14,59	
2 ^e Approximation	37,50	10.004	- 9,986	+ 0,04	- 1,32	0,19	3,40
3 ^e Approximation	47,00	9.994	- 10,006	- 0,06	- 0,27	0,13	0,69
4 ^e Approximation	47,38	10.004	- 9,996	+ 0,04	- 0,10	0,13	0,38

TABLEAU VIII

Diode : méthode n° 3														
$\frac{Z/d}{\phi}$	0	0.005	0.010	0.015	0.020	0.025	0.0375	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35
Approximation 0	100	99,50	99,00	98,50	98,00	97,50	96,245	94,995	89,99	84,995	79,99	74,99	69,99	64,99
Approximation 1	100	99,989	99,96	99,91	99,85	99,77	99,52	99,18	97,33	94,84	91,82	88,36	84,50	80,27
Approximation 2	100	99,99	99,91	99,78	99,63	99,45	98,93	98,32	95,30	91,75	87,82	83,58	79,10	74,38
Approximation 3	100	99,99	99,88	99,74	99,58	99,40	98,87	98,27	95,36	91,94	88,15	84,04	79,67	75,07
Approximation 4	100	99,99	99,88	99,74	99,58	99,39	98,87	98,28	95,42	92,04	88,28	84,18	79,83	75,23
Loi de Child	100	99,915	99,785	99,63	99,46	99,27	98,745	98,16	95,36	92,03	88,305	84,25	79,92	75,34

$\frac{Z/d}{\phi}$	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1	£ %
Approximation 0	59,99	54,99	49,99	44,99	39,99	34,995	30,00	25,00	20,00	15,00	10,00	5,00	0	- 12,49
Approximation 1	75,70	70,83	65,64	60,19	54,47	48,48	42,24	35,76	29,05	22,12	14,94	7,58	0	+ 6,53
Approximation 2	69,48	64,42	59,17	53,79	48,28	42,63	36,86	30,98	24,99	18,89	12,67	6,39	0	- 1,32
Approximation 3	70,25	65,24	60,03	54,67	49,15	43,47	37,65	31,69	25,60	19,38	13,02	6,57	0	- 0,27
Approximation 4	70,42	65,41	60,18	54,82	49,29	43,60	37,76	31,79	25,68	19,44	13,06	6,59	0	- 0,10
Loi de Child	70,53	65,52	60,365	54,95	49,395	43,695	37,855	31,86	25,735	19,48	13,11	6,615	0	

TABLEAU IX

$r_0 / \Delta r$	$z_0 / \Delta r$	r'_0	$h_0 / \Delta r$	$2Rh_0 / \Delta r^2$
1	0,013608	– 0,0272210		
2	0,054462	– 0,0545025	0,109046	8,014881
3	0,122654	– 0,0819060	0,1638735	12,044702
4	0,2183355	– 0,1094941	0,219071	16,1017185
5	0,341725	– 0,1373314	0,2747685	20,195485
6	0,493104	– 0,1654858	0,331101	24,3359235
7	0,672826	– 0,1940285	0,388212	28,533582
8	0,881316	– 0,2230358	0,4462535	32,799632
9	1,1190795	– 0,2525896	0,505391	37,1462385
10	1,386707	– 0,2827791	0,5658025	41,586484
11	1,684882	– 0,3137021	0,6276845	46,134811
12	2,0143915	– 0,3454668	0,6912545	50,807206
13	2,3761365	– 0,3781943	0,756755	55,6214925
14	2,7711465	– 0,4120210	0,824460	60,597810
15	3,2005965	– 0,4471018	0,8946805	65,759017
16	3,665827	– 0,4836149	0,9677755	71,131499
17	4,168372	– 0,5217664	1,044159	76,7456865
18	4,709986	– 0,5617975	1,1243155	82,637189
19	5,2926875	– 0,6039931	1,2088205	88,848307
20	5,9188065	– 0,6486937		

TABLEAU X

1 ^{re} méthode $J_o = 15 \text{ A/m}^2$					
	R_Ω	i_L	i_ϕ	i_P	$i_P/i_L \%$
Champ Laplacien	5.667	0,017645			
1 ^{re} Approximation	11.130		0,008985	0,00866	49,08
2 ^e Approximation	8.843		0,01131	0,006335	35,90
3 ^e Approximation	8.171		0,01224	0,005405	30,63
4 ^e Approximation	7.730		0,01294	0,004705	26,665

TABLEAU XII

θ°	10	20	30	40	45	50	60	70	80
y_{1T}	21,89	41,1385	55,425	63,0276	64	63,0276	55,425	41,1385	21,89
y_{1e}	21,89	41,20	55,435	63,15	64	63,025	55,33	41,17	21,92
$ \Delta y_1 $	0,00	0,0615	0,010	0,1224	0,00	0,0026	0,095	0,0315	0,03
$\frac{ \Delta y_1 }{y_1} \%$	0,00	0,15	0,02	0,19	0,00	0,00	0,17	0,08	0,14

TABLEAU XI

	J_0 A/m^2	Electrode focalisatrice		Electrode accélératrice		Electrode émettrice		Emetteur i_p	i_p / i_L %
		R_Ω	i_φ	R_Ω	i_φ	R_Ω	i_φ		
1 ^{re} Approximation	31,60	14.135	- 7,075	9.050	- 11,050	5720	- 17,4825	0	0
2 ^e Approximation	13,55	24.715	- 4,046	19.750	- 5,063	5714	- 17,5009	- 0,0184	- 0,105
3 ^e Approximation	21,00	18.370	- 5,444	10.395	- 9,620	5723,5	- 17,4718	+ 0,0107	+ 0,06
4 ^e Approximation	15,25	19.795	- 5,052	13.867	- 7,211	5719,5	- 17,4840	- 0,0015	- 0,01
Champ Laplacien		593,3	$i_L =$ 168,548	537,6	$i_L =$ - 186,012	5720	$i_L =$ 17,4825	$i_L = 17,4825$	

TABLEAU XIII

$\textcircled{H}_i$	$\alpha p / j_0$	$\frac{d(\alpha p / j_0)}{dr}$	$\frac{d^2(\alpha p / j_0)}{dr^2}$	K_1
99,627	4,165	0,024	négligeable	49,74
K_2	K_3	$E_1 \%$	$E_2 \%$	$E_3 \%$
1,36	10,63	- 0,15	+ 0,02	négligeable
		$E \% = -0,13$		

TABLEAU XIV

$\textcircled{H}_i$	$\alpha p / j_0$	$\frac{d(\alpha p / j_0)}{dr}$	$\frac{d^2(\alpha p / j_0)}{dr^2}$	K_1
40,098	10,371	1,769	0,401	19,746
K_2	K_3	$E_1 \%$	$E_2 \%$	$E_3 \%$
0,63	4,065	- 1,51	+ 0,54	+ 0,39
		$E \% = -0,58$		

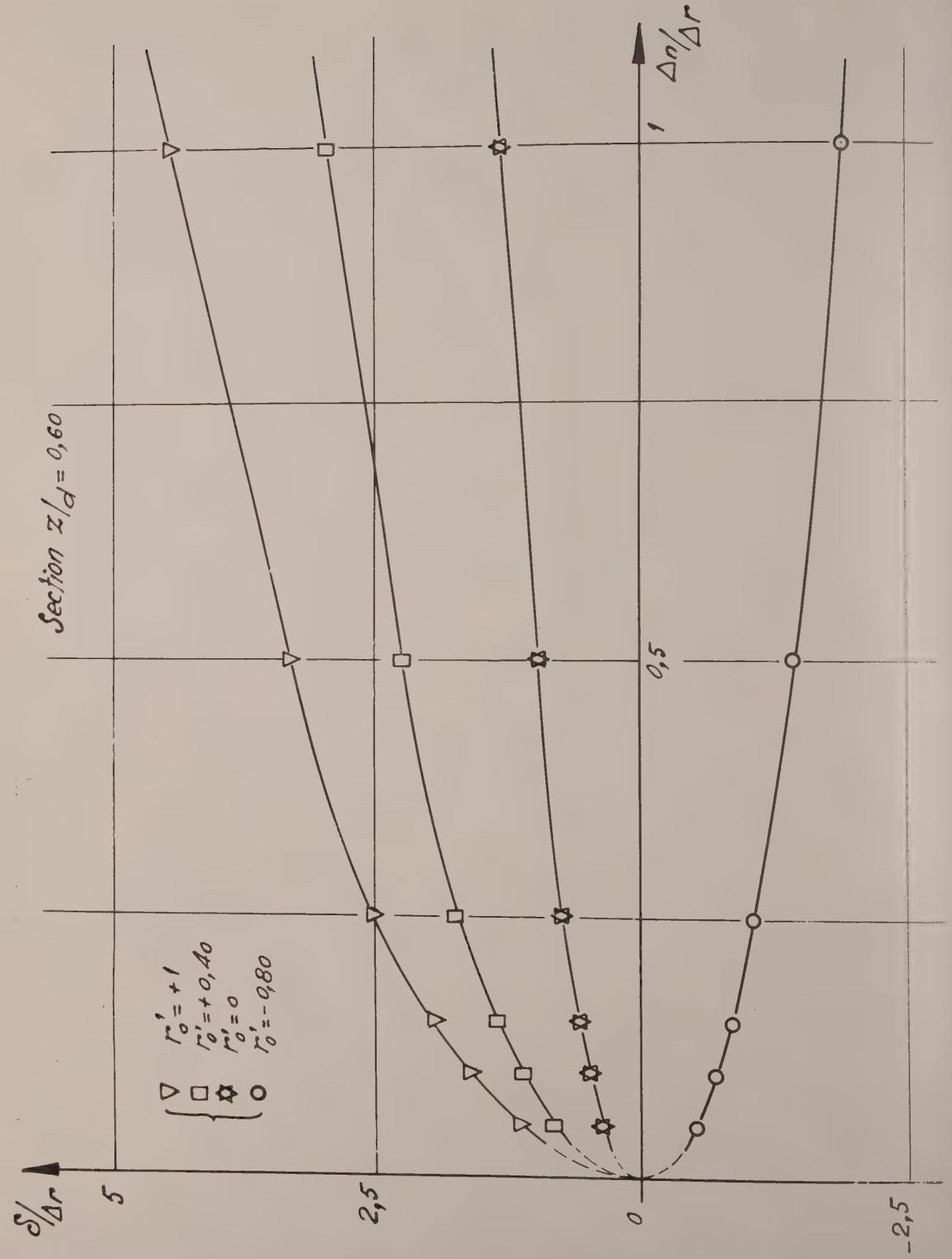
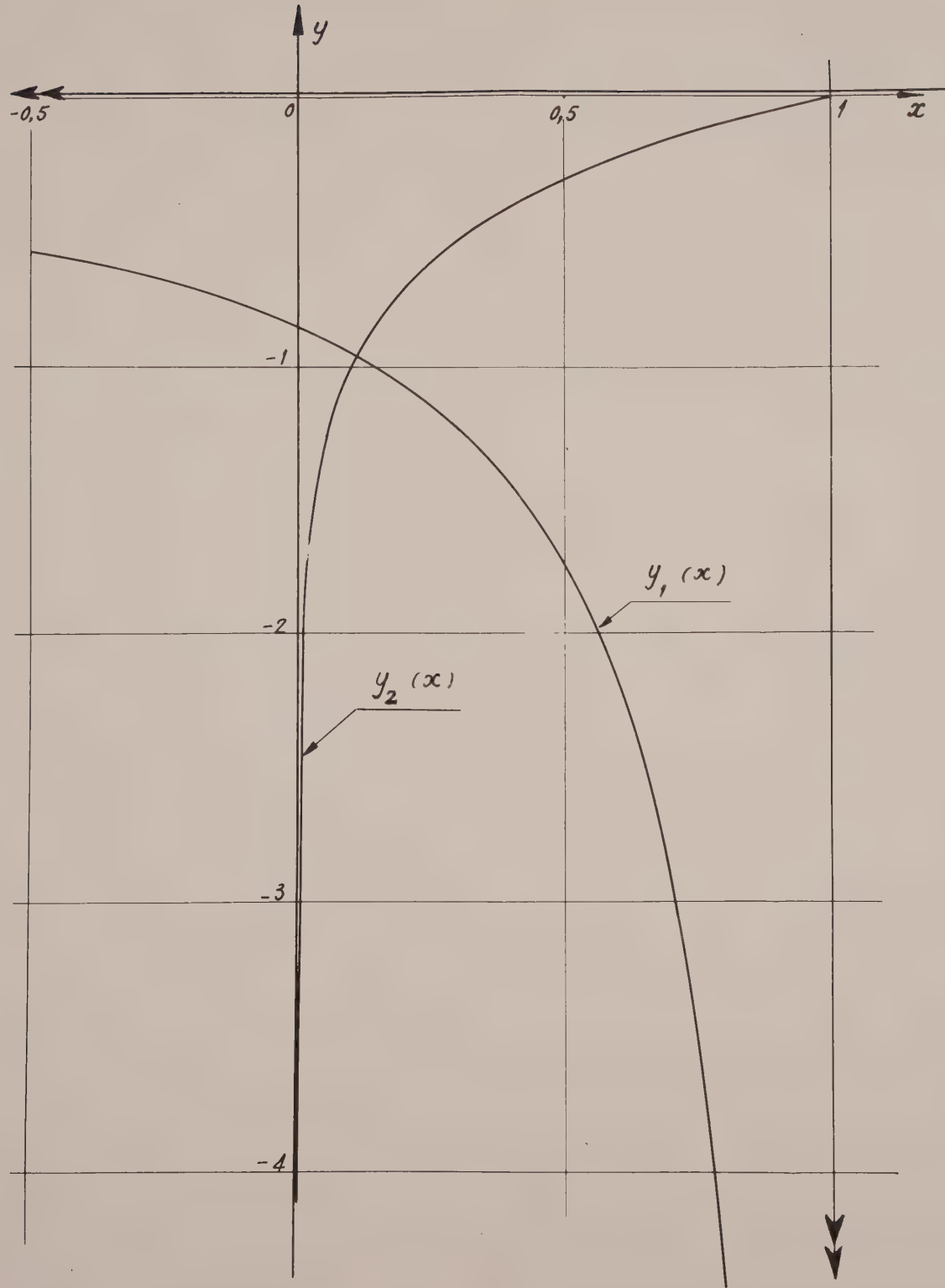
Champ I

Répartition du potentiel ϕ solution de $\Delta\phi=0$

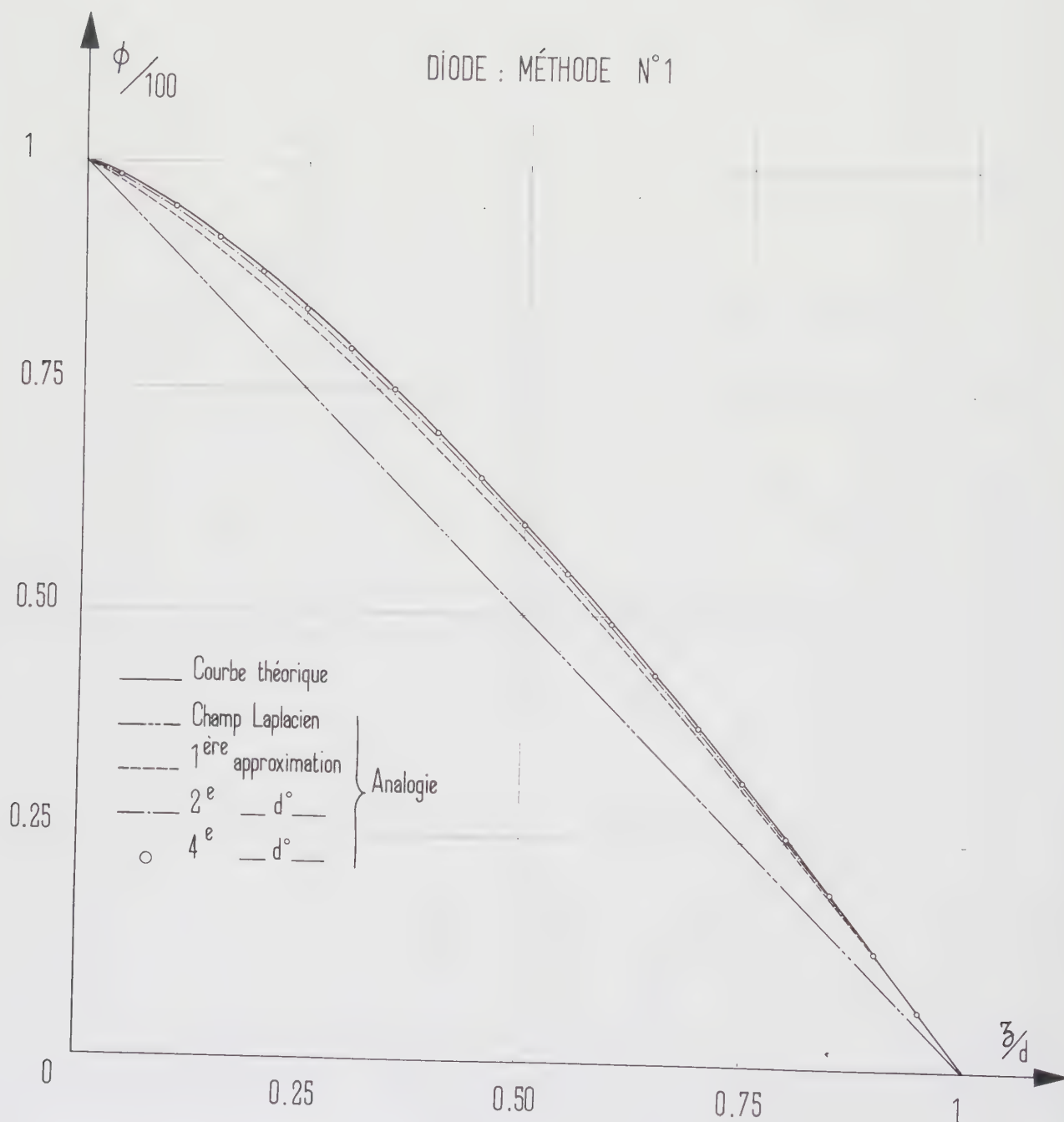
$\frac{z}{r} \backslash \frac{r}{\Delta r}$	0	0,25	0,50	0,75	1	1,5	2	2,5	3	4	5	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	
0,135		99,62	99,23	98,84	98,44	97,64	96,81	95,95	95,07	93,235	91,28	89,22	84,705	79,60	73,85	67,44	60,29	52,62	44,56	36,45	28,71	21,73	15,88	11,27	7,87	5,51	3,94	2,95	2,36	2,02	1,87	
1		99,63	99,25	98,86	98,46	97,66	96,83	95,97	95,10	93,26	91,31	89,25	84,74	79,64	73,90	67,47	60,34	52,65	44,56	36,43	28,64	21,65	15,79	11,19	7,81	5,45	3,91	2,92	2,34	2,01	1,86	
2		99,71	99,32	98,93	98,53	97,73	96,91	96,05	95,18	93,35	91,41	89,35	84,85	79,77	74,03	67,61	60,46	52,72	44,58	36,36	28,49	21,43	15,54	10,95	7,59	5,29	3,79	2,85	2,29	1,97	1,84	
3		99,81	99,42	99,03	98,64	97,84	97,02	96,18	95,31	93,49	91,56	89,51	85,04	79,97	74,25	67,81	60,66	52,84	44,61	36,25	28,23	21,06	15,13	10,57	7,26	5,03	3,61	2,73	2,21	1,92	1,79	
4		99,95	99,57	99,19	98,80	98,01	97,19	96,35	95,49	93,68	91,77	89,74	85,29	80,26	74,56	68,12	60,93	53,03	44,65	36,09	27,86	20,54	14,55	10,02	6,79	4,68	3,36	2,56	2,11	1,84	1,73	
5			99,76	99,38	98,99	98,21	97,41	96,57	95,71	93,93	92,04	90,03	85,62	80,64	74,96	68,52	61,29	53,29	44,72	35,91	27,38	19,83	13,77	9,31	6,17	4,23	3,06	2,36	1,97	1,75	1,66	
6			99,98	99,61	99,23	98,45	97,65	96,83	95,99	94,23	92,36	90,38	86,02	81,11	75,47	69,04	61,76	53,64	44,84	35,67	26,77	18,92	12,76	8,43	5,41	3,69	2,71	2,13	1,82	1,65	1,58	
7				99,88	99,51	98,74	97,95	97,14	96,31	94,58	92,74	90,80	86,53	81,66	76,07	69,66	62,34	54,09	45,01	35,43	26,02	17,75	11,51	7,39	4,44	3,07	2,29	1,88	1,66	1,55	1,50	
8					99,82	99,07	98,29	97,51	96,68	94,98	93,18	91,27	87,09	82,31	76,79	70,42	63,07	54,67	45,28	35,17	25,11	16,27	9,90	5,91	3,54	2,39	1,86	1,62	1,51	1,44	1,41	
9						99,43	98,67	97,89	97,09	95,43	93,67	91,81	87,72	83,04	77,62	71,32	63,96	55,42	45,68	34,96	24,00	14,38	7,93	4,23	2,45	1,64	1,41	1,36	1,34	1,33	1,33	
10						99,82	99,08	98,32	97,54	95,92	94,21	92,39	88,43	83,87	78,58	72,37	65,03	56,38	46,27	34,81	22,67	11,95	5,52	2,28	1,24	0,84	0,97	1,12	1,21	1,26	1,26	
11							99,53	98,79	98,03	96,45	94,79	93,03	89,21	84,81	79,67	73,59	66,32	57,58	47,13	34,85	21,13	8,73	2,58					0,56	0,91	1,08	1,16	1,21
12								99,29	98,55	97,02	95,42	93,72	90,04	85,82	80,89	75,00	67,84	59,09	48,35	35,24	19,42	4,31						0,37	0,77	0,99	1,11	1,15
13			$\phi = 100$					99,81	99,09	97,62	96,08	94,45	90,94	86,94	82,24	76,59	69,64	60,95	50,05	36,24	17,66							0,29	0,69	0,93	1,06	1,12
14									99,64	98,24	96,76	95,22	91,89	88,13	83,72	78,38	71,71	63,21	52,32	38,32	19,24			$\phi = 0$				0,26	0,65	0,91	1,04	1,11
15										98,88	97,47	96,01	92,89	89,41	85,33	80,38	74,08	65,88	55,18	41,48	24,46	6,09						0,26	0,65	0,91	1,04	1,11
16										99,51	98,19	96,81	93,91	90,73	87,05	82,56	76,76	68,98	58,59	45,37	29,68	13,86	1,82									
17											98,91	97,61	94,94	92,09	88,86	84,93	79,76	72,53	62,48	49,51	34,61	19,89	8,59	1,21								
18											99,58	98,39	95,95	93,47	90,74	87,47	83,09	76,57	66,85	53,88	39,19	24,75	12,64	3,37								
19		Frontière ne débitant pas											99,15	96,91	94,84	92,64	90,13	86,77	81,16	71,77	58,43	43,48	28,79	15,78	4,80							
20													99,81	97,78	96,18	94,52	92,87	90,81	86,43	77,41	63,15	47,48	32,21	18,27	5,81							
21	99,83	99,83	99,83	99,83	99,83	99,83	99,82	99,82	99,81	99,81	99,79	99,61	98,51	97,46	96,31	95,59	95,20	92,58	84,05	67,98	51,19	35,13	20,27	6,57								
22	99,84	99,84	99,84	99,83	99,83	99,83	99,83	99,82	99,82	99,81	99,76	99,65	99,18	98,71	97,91	98,11			92,23	72,76	54,54	37,62	21,91	7,17								
23	99,84	99,84	99,84	99,84	99,84	99,84	99,84	99,83	99,83	99,82	99,81	99,77	99,83		99,18	99,61				77,03	57,42	39,72	23,22	7,63								
24	99,85	99,85	99,85	99,85	99,85	99,85	99,85	99,83	99,83	99,84	99,84	99,85	99,97							80,17	59,72	41,39	24,30	8,01								
25	99,86	99,86	99,86	99,86	99,86	99,86	99,86	99,86	99,86	99,87	99,88	99,89	99,98							81,94	61,41	42,69	25,13	8,29								
26	99,87	99,87	99,87	99,87	99,87	99,87	99,87	99,88	99,88	99,89	99,91	99,92	100,00							82,96	62,59	43,65	25,75	8,51								
27	99,87	99,87	99,87	99,87	99,87	99,87	99,87	99,88	99,88	99,89	99,91	99,93	100,00			$\phi = 100$				83,56	63,37	44,32	26,21	8,66								
28	99,87	99,87	99,87	99,87	99,87	99,87	99,87	99,88	99,88	99,89	99,92	99,94	100,00							83,90	63,84	44,74	26,48	8,76								
29	99,87	99,87	99,87	99,87	99,87	99,87	99,87	99,88	99,88	99,89	99,92	99,94	100,00							84,04	64,06	44,94	26,61	8,81								
30	99,87	99,87	99,87	99,87	99,87	99,87	99,87	99,88	99,88	99,89	99,92	99,94	100,00							84,04	64,06	44,94	26,61	8,81								

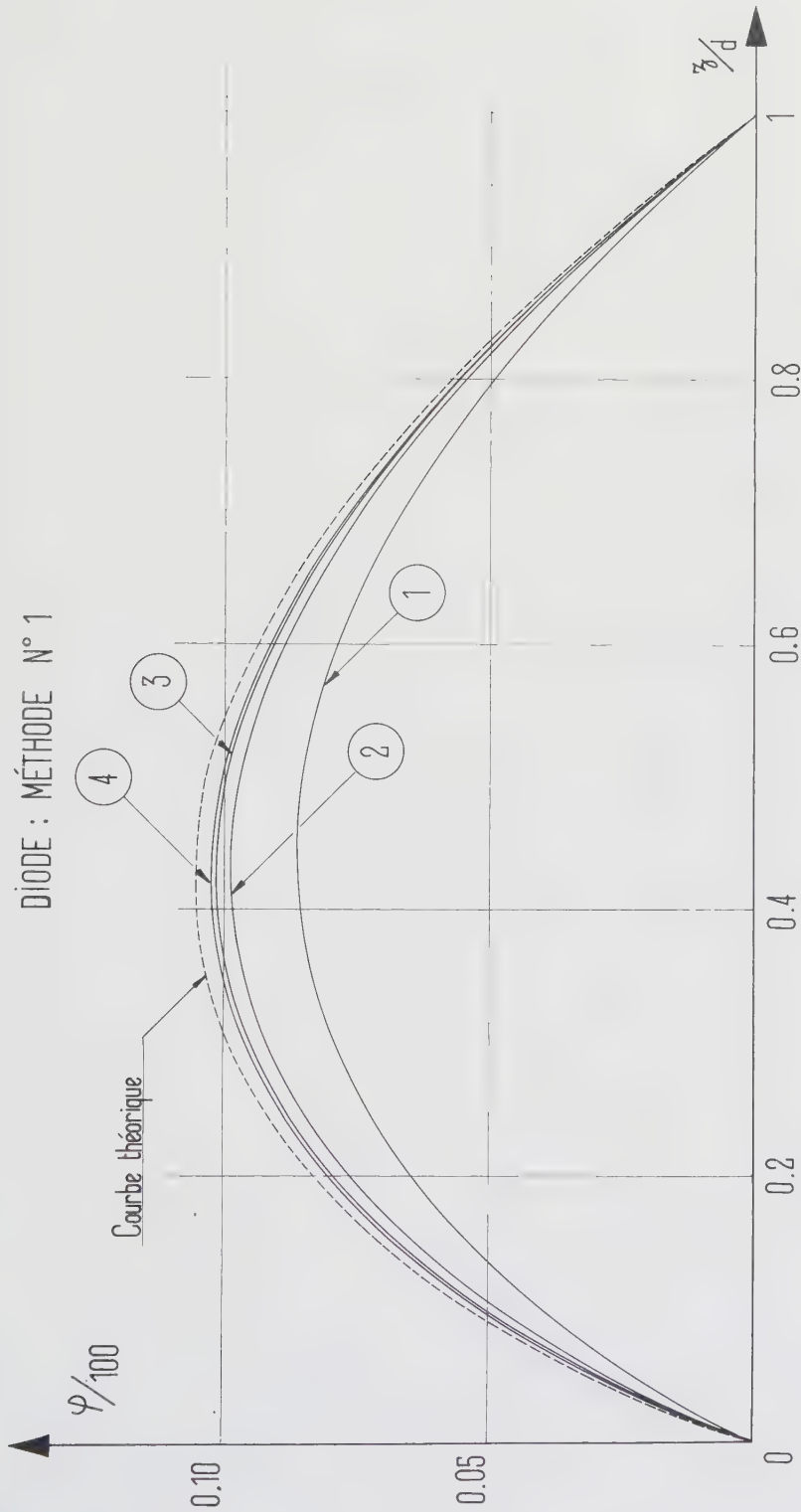
Champ II
 Répartition du potentiel ϕ solution de $\Delta\phi = -\rho/\epsilon_0$
 Méthode n°3 - 4^e approximation

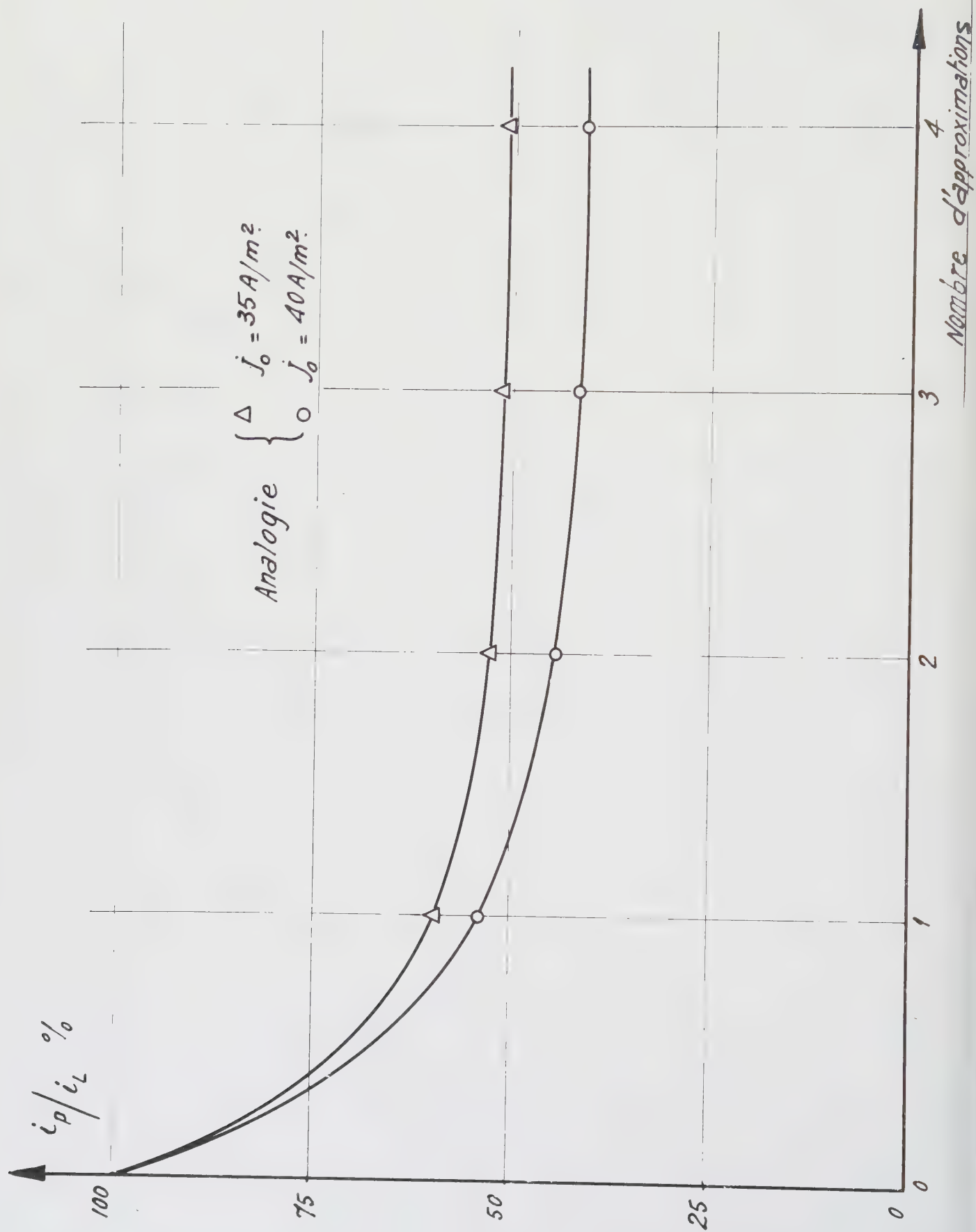
$\frac{Z}{r/\Delta r}$	0	0,25	0,50	0,75	1	1,5	2	2,5	3	4	5	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44
0,135		99,99	99,97	99,935	99,865	99,69	99,44	99,12	98,73	97,725	96,435	94,855	90,83	85,96	80,285	73,81	66,47	58,53	50,125	41,61	33,575	26,27	20,135	15,32	11,79	9,38	7,79	6,775	6,14	5,69	5,34
1		99,99	99,97	99,935	99,87	99,69	99,445	99,13	98,735	97,74	96,45	94,98	90,87	86,01	80,34	73,84	66,51	58,545	50,115	41,59	33,50	26,175	20,04	15,23	11,72	9,34	7,75	6,74	6,12	5,675	5,31
2		99,99	99,975	99,94	99,88	99,715	99,47	99,16	98,78	97,79	96,52	94,955	90,96	86,12	80,44	73,94	66,59	58,57	50,08	41,50	33,28	25,89	19,71	14,91	11,43	9,08	7,57	6,62	6,025	5,60	5,245
3		100,00	99,985	99,95	99,90	99,745	99,515	99,21	98,84	97,86	96,605	95,06	91,10	86,27	80,61	74,08	66,72	58,61	50,02	41,30	32,92	25,42	19,17	14,39	10,97	8,70	7,28	6,40	5,87	5,49	5,13
4		100,00	99,995	99,97	99,925	99,785	99,57	99,28	98,92	97,98	96,74	95,21	91,27	86,485	80,83	74,29	66,89	58,67	49,93	41,00	32,40	24,75	18,41	13,65	10,32	8,19	6,88	6,09	5,65	5,31	4,98
5			100,00	99,985	99,95	99,83	99,63	99,36	99,015	98,10	96,895	95,39	91,495	86,76	81,12	74,57	67,11	58,77	49,83	40,625	31,71	23,80	17,38	12,69	9,45	7,51	6,39	5,70	5,36	5,095	4,78
6			100,00	99,995	99,975	99,87	99,695	99,44	99,12	98,245	97,07	95,60	91,76	87,095	81,50	74,94	67,405	58,925	49,735	40,165	30,85	22,59	16,05	11,49	8,37	6,68	5,80	5,22	5,01	4,84	4,545
7				100,00	99,99	99,91	99,755	99,53	99,225	98,40	97,27	95,85	92,11	87,48	81,93	75,38	67,78	59,15	49,665	39,66	29,78	21,055	14,41	10,02	7,03	5,68	5,06	4,66	4,57	4,54	4,29
8					100,00	99,945	99,815	99,62	99,335	98,56	97,485	96,11	92,47	87,92	82,44	75,92	68,28	59,48	49,66	39,09	28,50	19,14	12,32	8,00	5,57	4,50	4,23	4,03	4,06	4,10	4,00
9						99,975	99,875	99,705	99,45	98,73	97,715	96,40	92,88	88,43	83,03	76,57	68,91	59,95	49,76	38,53	26,96	16,71	9,76	5,64	3,76	3,05	3,17	3,38	3,58	3,71	3,72
10						99,995	99,93	99,79	99,575	98,925	97,97	96,72	93,32	89,01	83,71	77,33	69,67	60,57	50,00	37,97	25,13	13,64	6,66	2,99	1,865	1,555	2,185	2,80	3,19	3,40	3,49
11							99,975	99,875	99,70	99,12	98,245	97,07	93,82	89,65	84,50	78,22	70,61	61,41	50,47	37,55	23,02	9,80	2,95				1,32	2,30	2,86	3,15	3,30
12								99,95	99,82	99,33	98,54	97,44	94,33	90,35	85,37	79,27	71,75	62,50	51,26	37,47	20,81	4,76					0,91	1,98	2,62	2,98	3,14
13			$\phi = 100$					99,995	99,92	99,54	98,845	97,84	94,89	91,10	86,34	80,46	73,12	63,92	52,52	38,07	18,61						0,67	1,80	2,47	2,86	3,04
14								99,985	99,72	99,14	98,24	95,48	91,90	87,41	81,82	74,755	65,77	54,41	39,83	19,98			$\phi = 0$				0,55	1,70	2,40	2,81	3,00
15									99,88	99,43	98,65	96,10	92,76	88,58	83,36	76,68	68,06	56,86	42,75	25,14	6,21						0,55	1,70	2,40	2,81	3,00
16									99,985	99,70	99,06	96,70	93,61	89,82	85,04	78,92	70,80	60,05	46,43	30,30	14,07	1,90									
17										99,875	99,47	97,29	94,48	91,11	86,96	81,52	74,01	63,67	50,49	35,16	20,14	8,68	1,22								
18										99,965	99,88	97,82	95,36	92,52	89,08	84,48	77,74	67,80	54,60	39,66	25,00	12,75	3,40								
19											99,98	98,22	96,24	94,00	91,35	87,81	82,03	72,50	58,91	43,87	29,02	15,89	4,83								
20											99,94	98,61	97,17	95,50	93,74	91,50	87,01	77,92	63,58	47,80	32,41	18,38	5,84								
21	99,90	99,90	99,90	99,90	99,90	99,90	99,89	99,89	99,88	99,89	99,88	99,78	99,02	98,09	96,96	96,13	95,56	92,86	84,36	68,29	51,44	35,30	20,36	6,60							
22	99,90	99,90	99,90	99,90	99,90	99,90	99,89	99,89	99,89	99,89	99,85	99,78	99,44	99,02	98,28	98,35		92,36	72,96	54,73	37,76	21,99	7,20								
23	99,90	99,90	99,90	99,90	99,90	99,90	99,90	99,89	99,89	99,89	99,89	99,86	99,89		99,39	99,67			77,16	57,56	39,83	23,29	7,66								
24	99,91	99,91	99,91	99,91	99,91	99,91	99,91	99,90	99,90	99,90	99,90	99,91	99,98						80,25	59,82	41,48	24,36	8,03								
25	99,91	99,91	99,91	99,91	99,91	99,91	99,91	99,91	99,91	99,92	99,93	99,93	99,98						81,99	61,49	42,76	25,18	8,31								
26	99,91	99,91	99,91	99,91	99,91	99,91	99,91	99,91	99,91	99,92	99,93	99,93	99,95	100,00					83,00	62,65	43,71	25,79	8,53								
27	99,91	99,91	99,91	99,91	99,91	99,91	99,91	99,91	99,92	99,93	99,93	99,96	100,00			$\phi = 100$			83,59	63,42	44,37	26,25	8,68								
28	99,91	99,91	99,91	99,91	99,91	99,91	99,91	99,91	99,92	99,93	99,93	99,96	100,00						83,92	63,88	44,88	26,51	8,77								
29	99,91	99,91	99,91	99,91	99,91	99,91	99,91	99,91	99,92	99,93	99,93	99,96	100,00						84,06	64,10	44,98	26,64	8,82								
30	99,91	99,91	99,91	99,91	99,91	99,91	99,91	99,91	99,92	99,93	99,93	99,96	100,00						84,06	64,10	44,98	26,64	8,82								

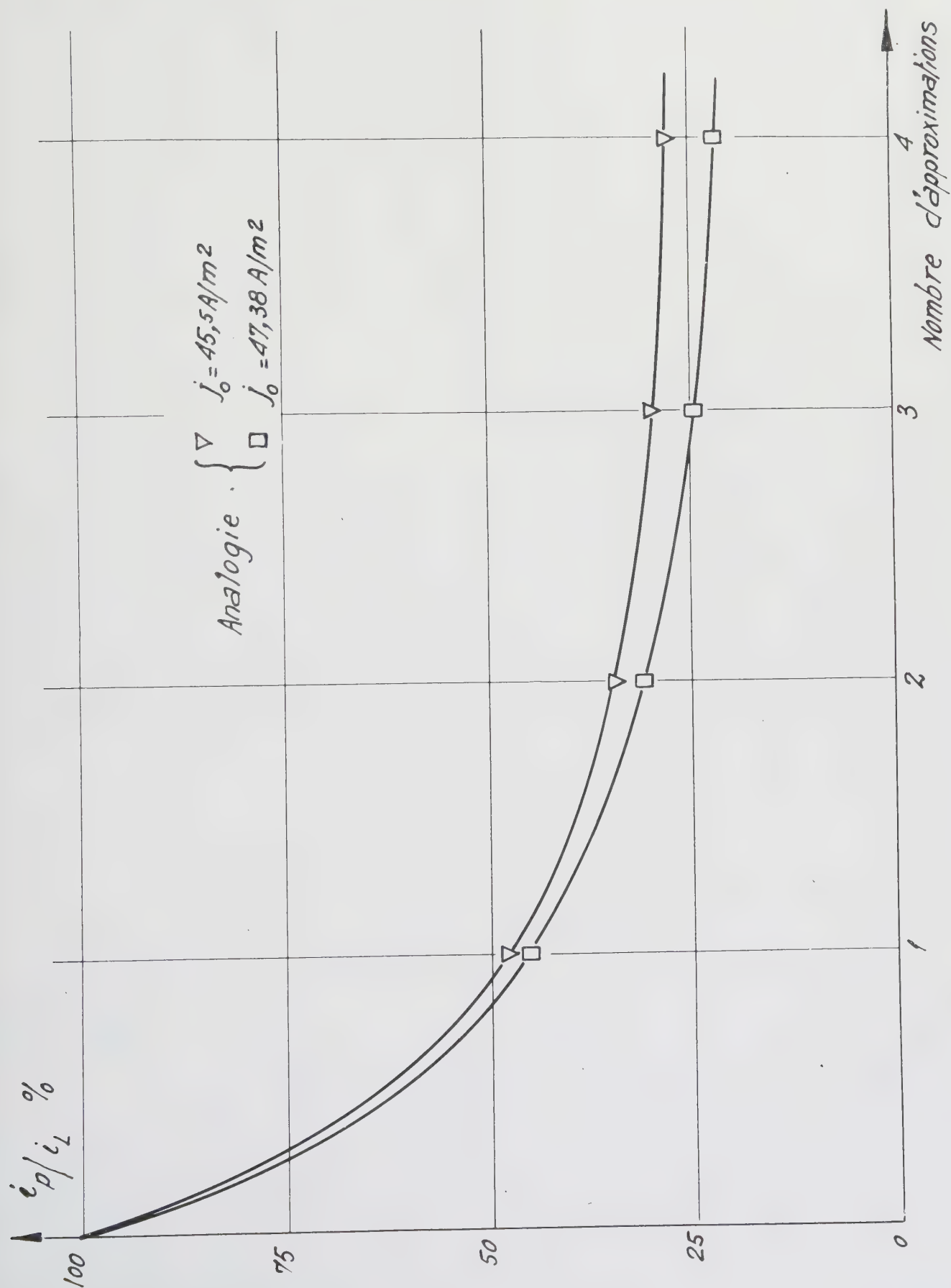


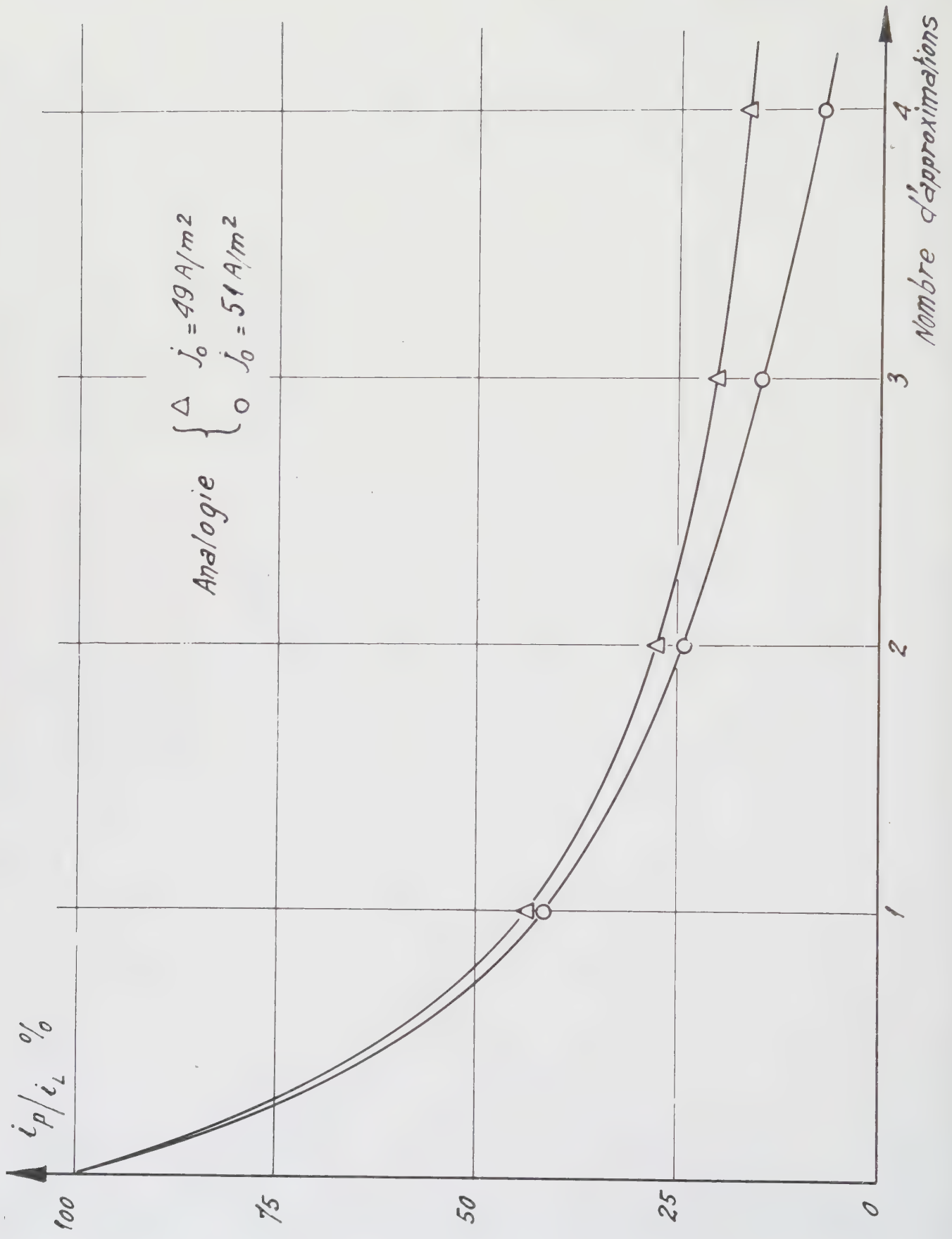




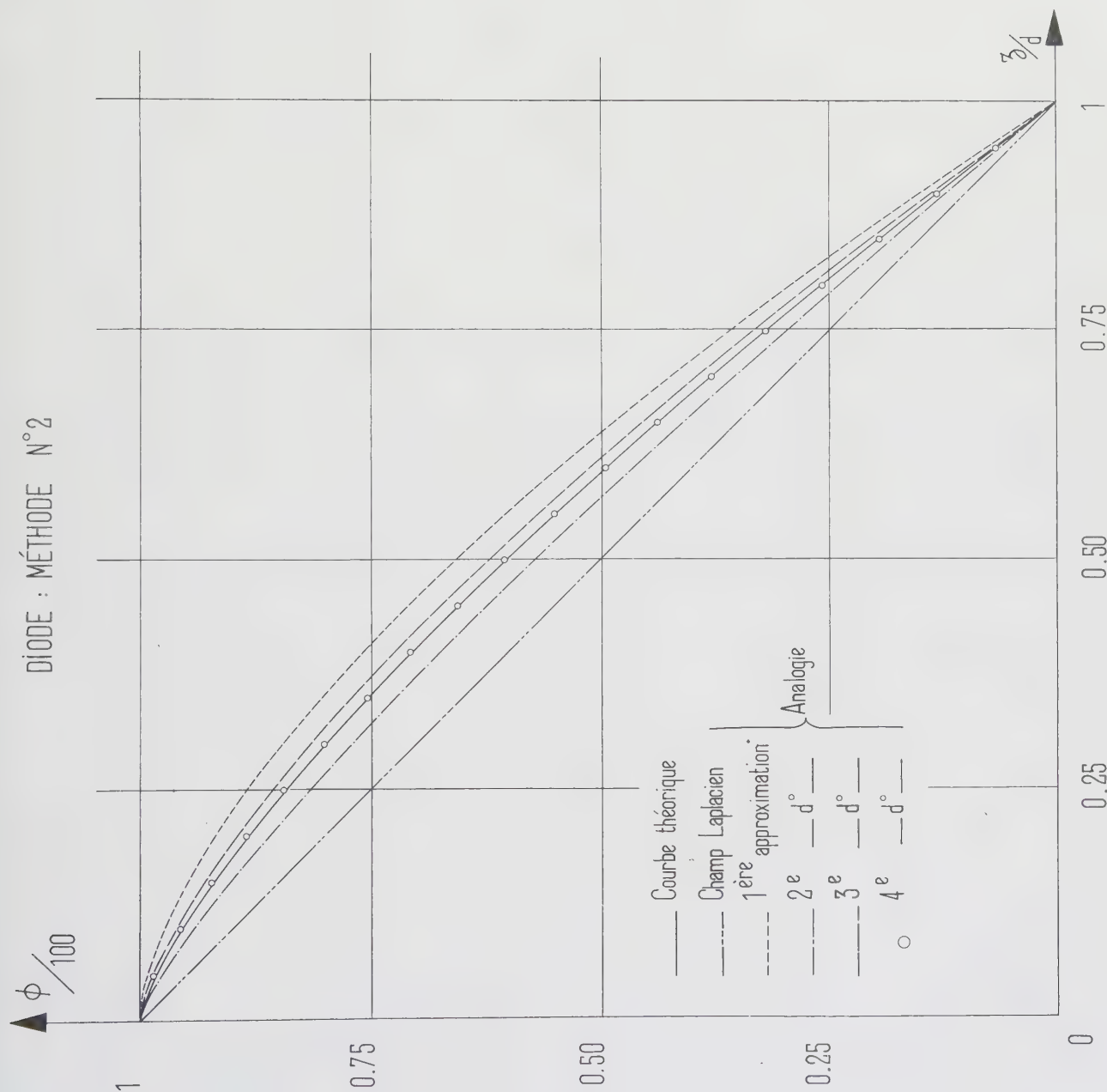


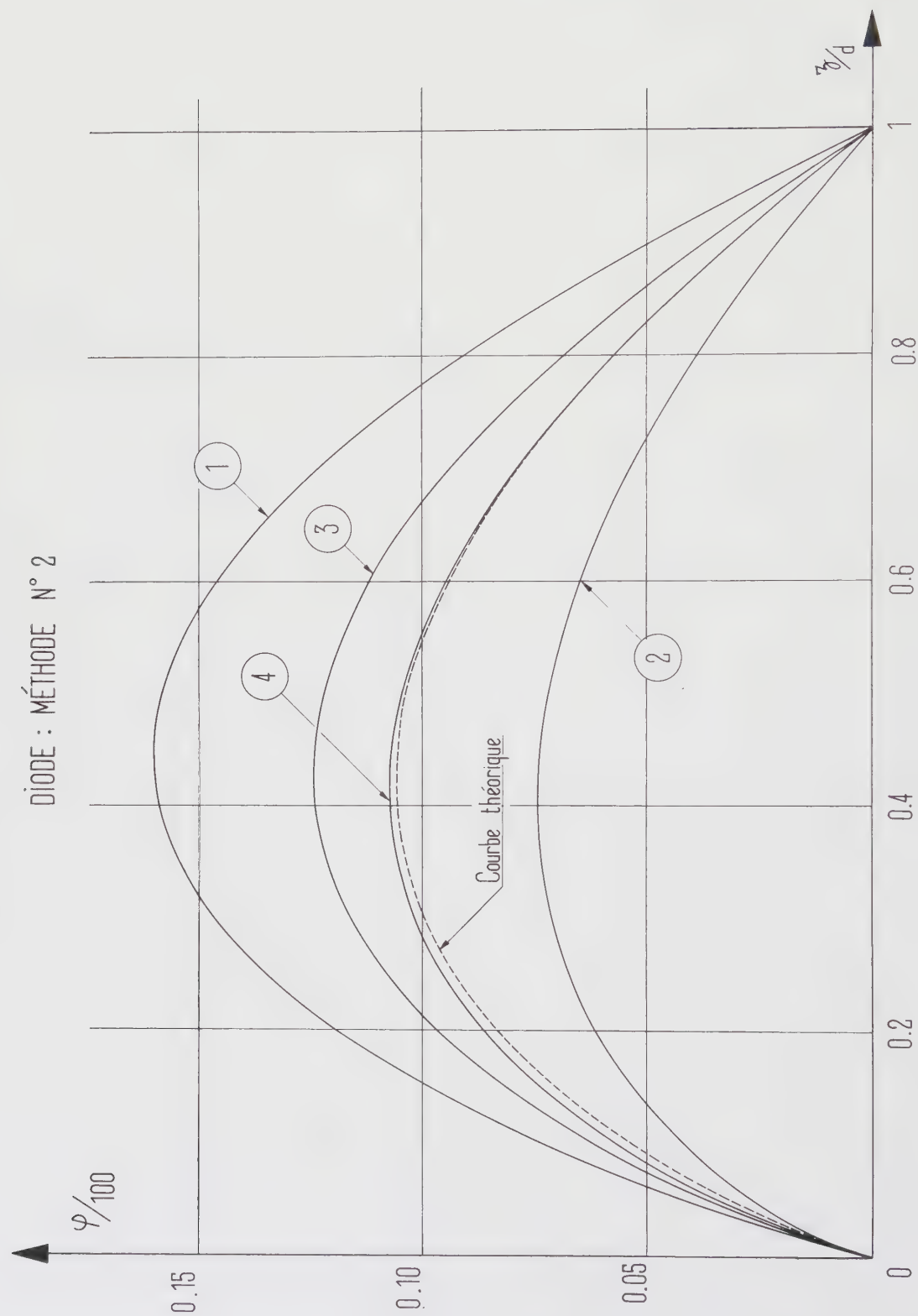


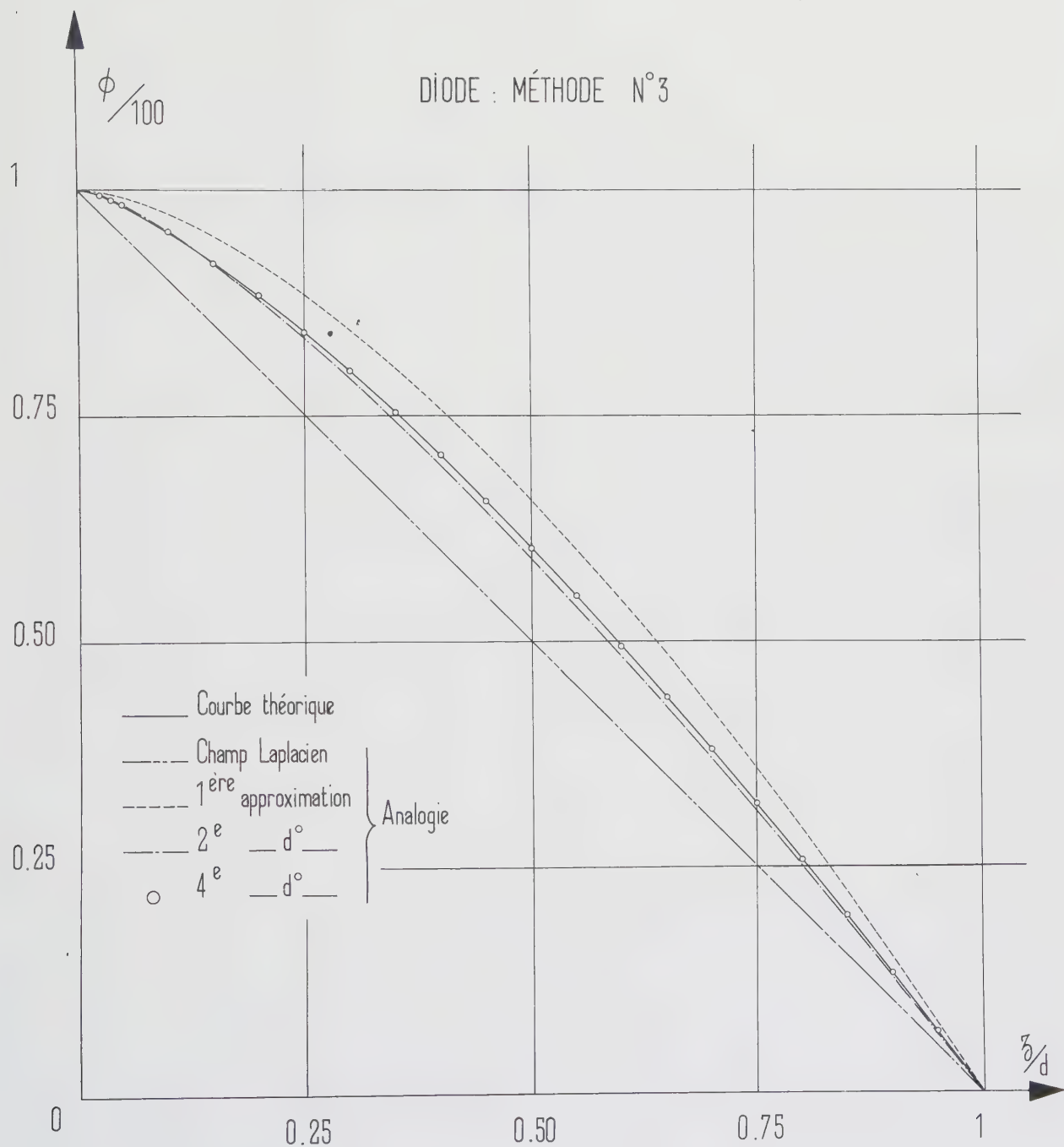


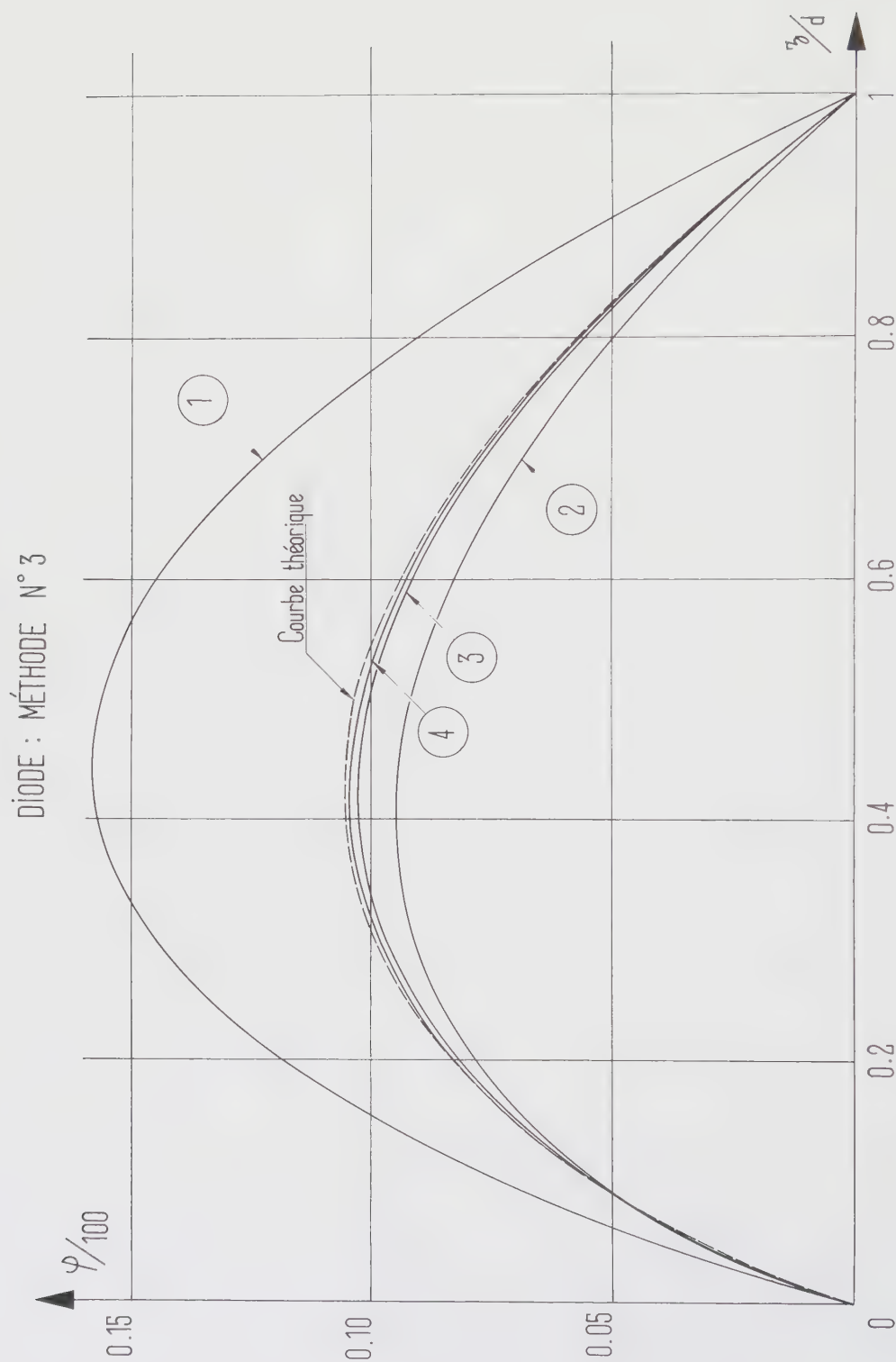


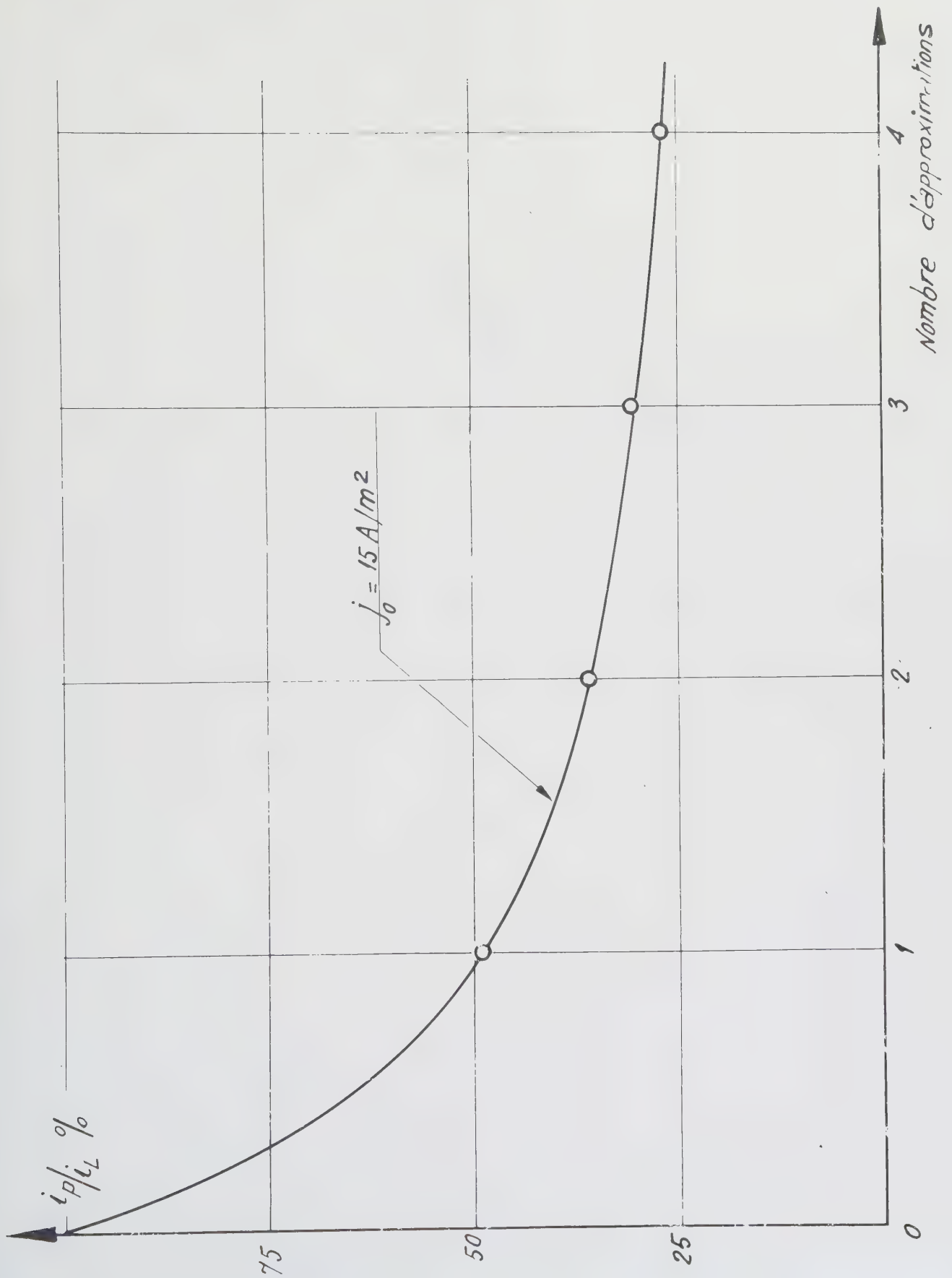
DIODE : MÉTHODE N°2

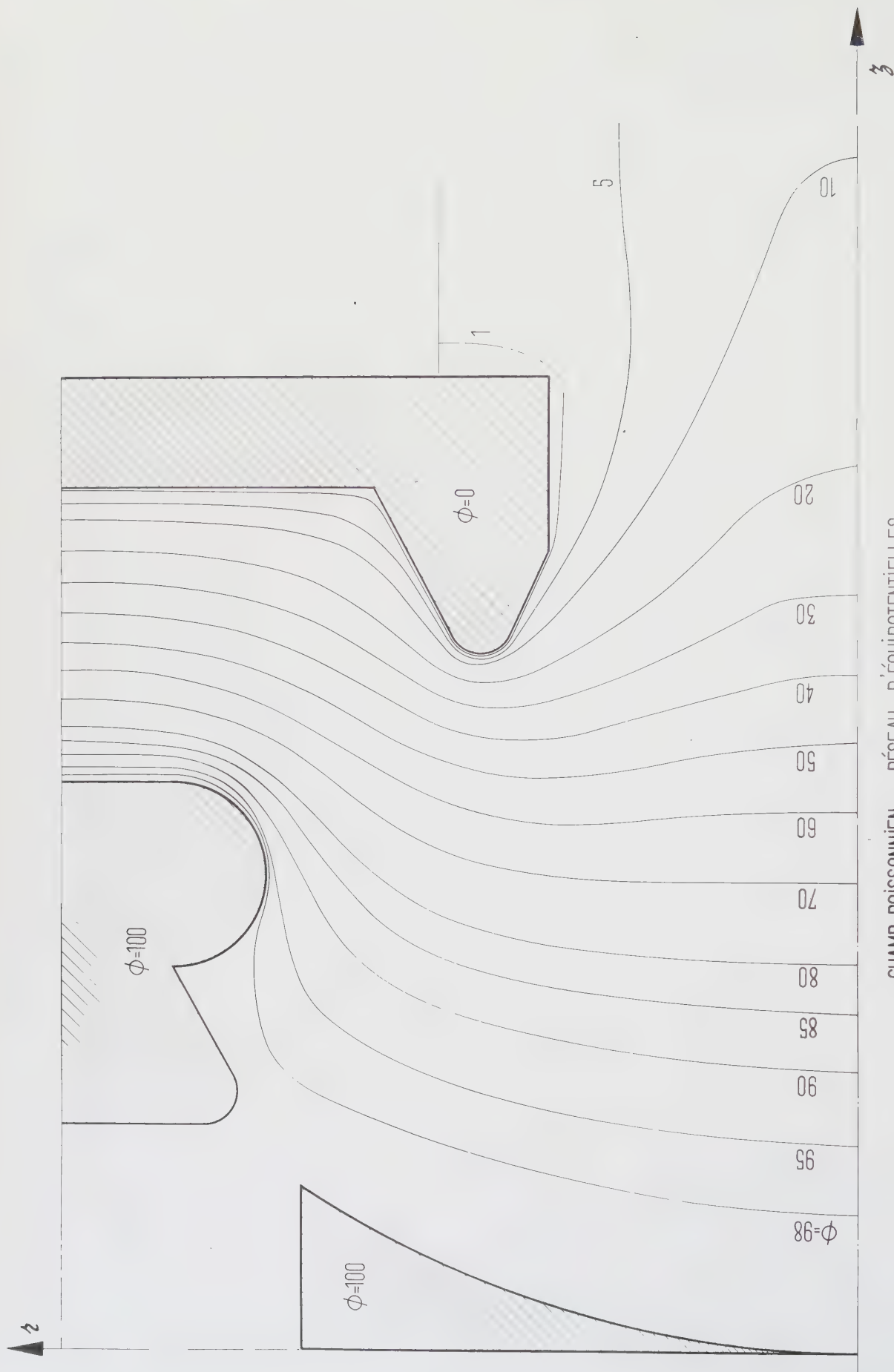






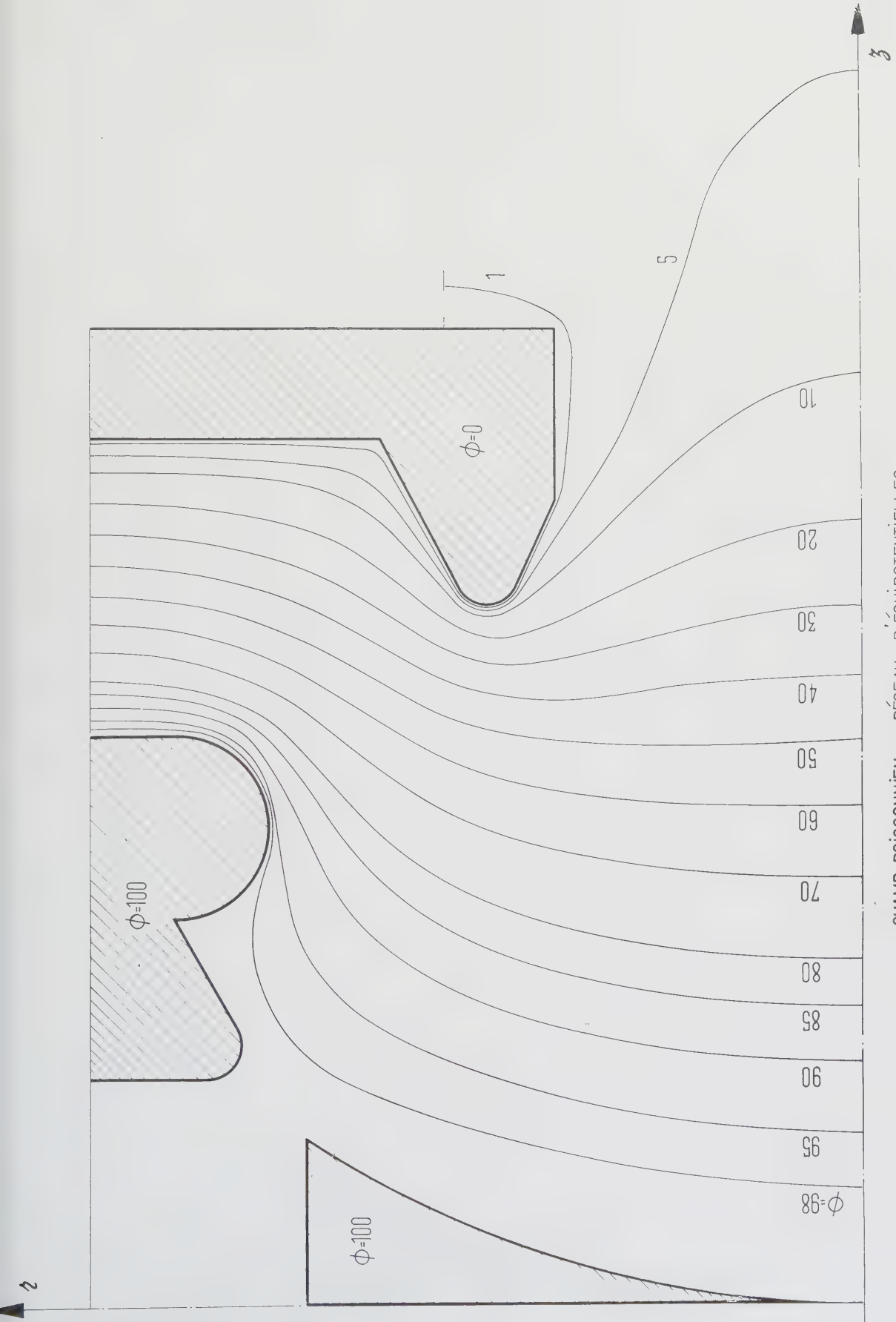






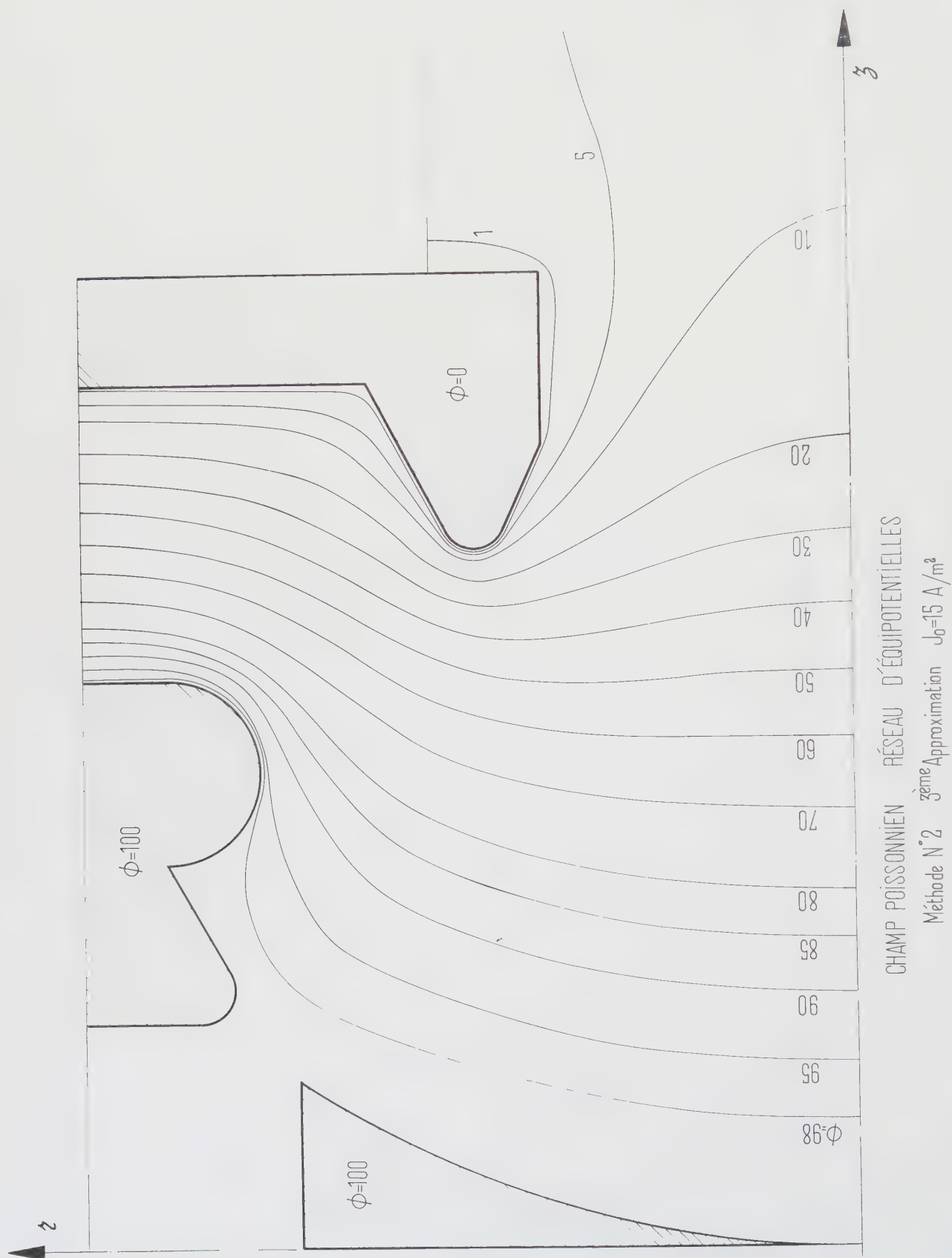
CHAMP POISSONNIEN RÉSEAU D'ÉQUIPOTENTIELLES

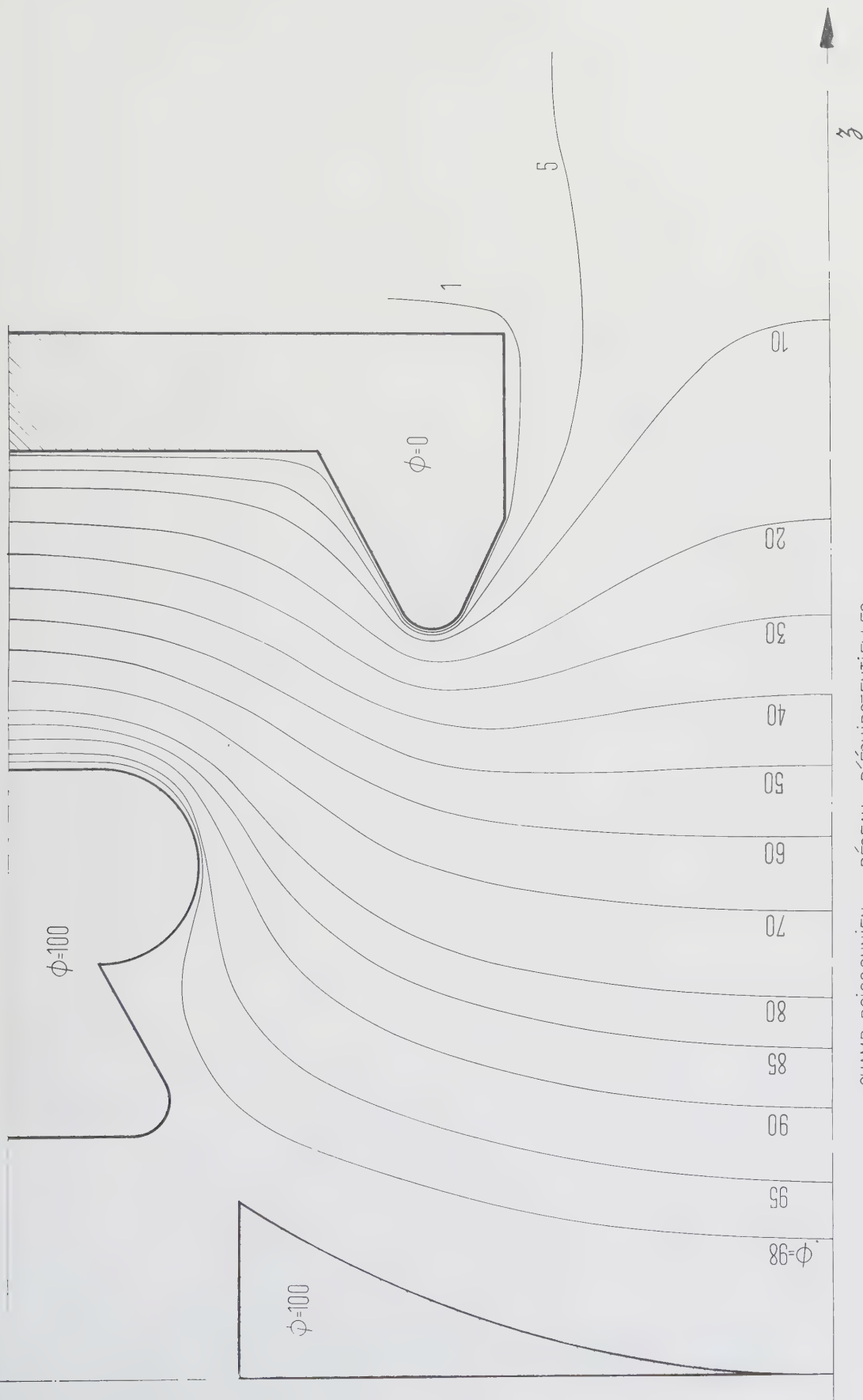
Méthode N° 2 - 1ère Approximation - $J_0 = 15 \text{ A/m}^2$



CHAMP POISSONNIEN RÉSEAU D'ÉQUIPOTENTIELLES

Méthode N° 2 - 2^{ème} Approximation - $J_0 = 15 \text{ A/m}^2$

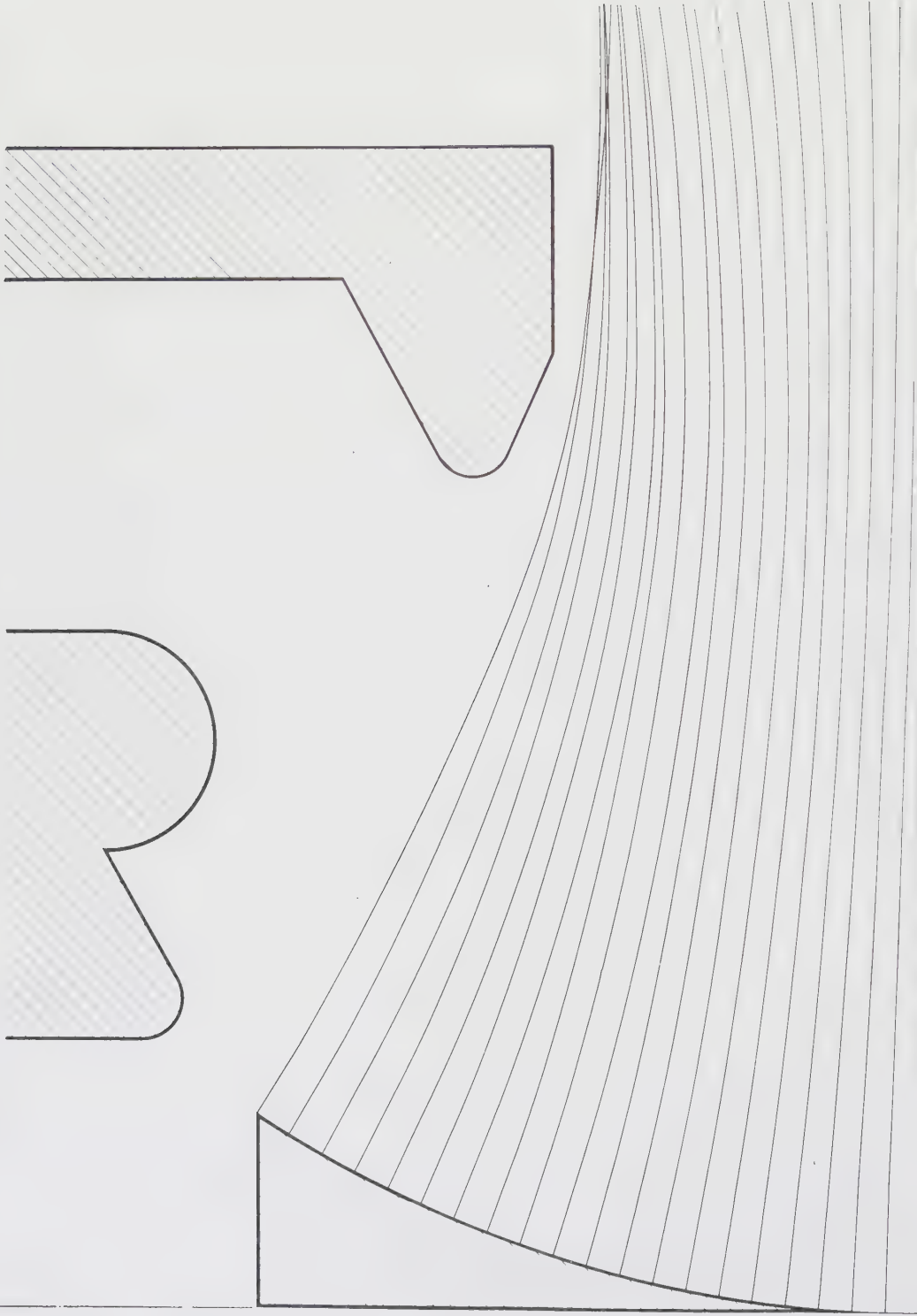




CHAMP POISSONNIEN RÉSEAU D'ÉQUIPOTENTIELLES

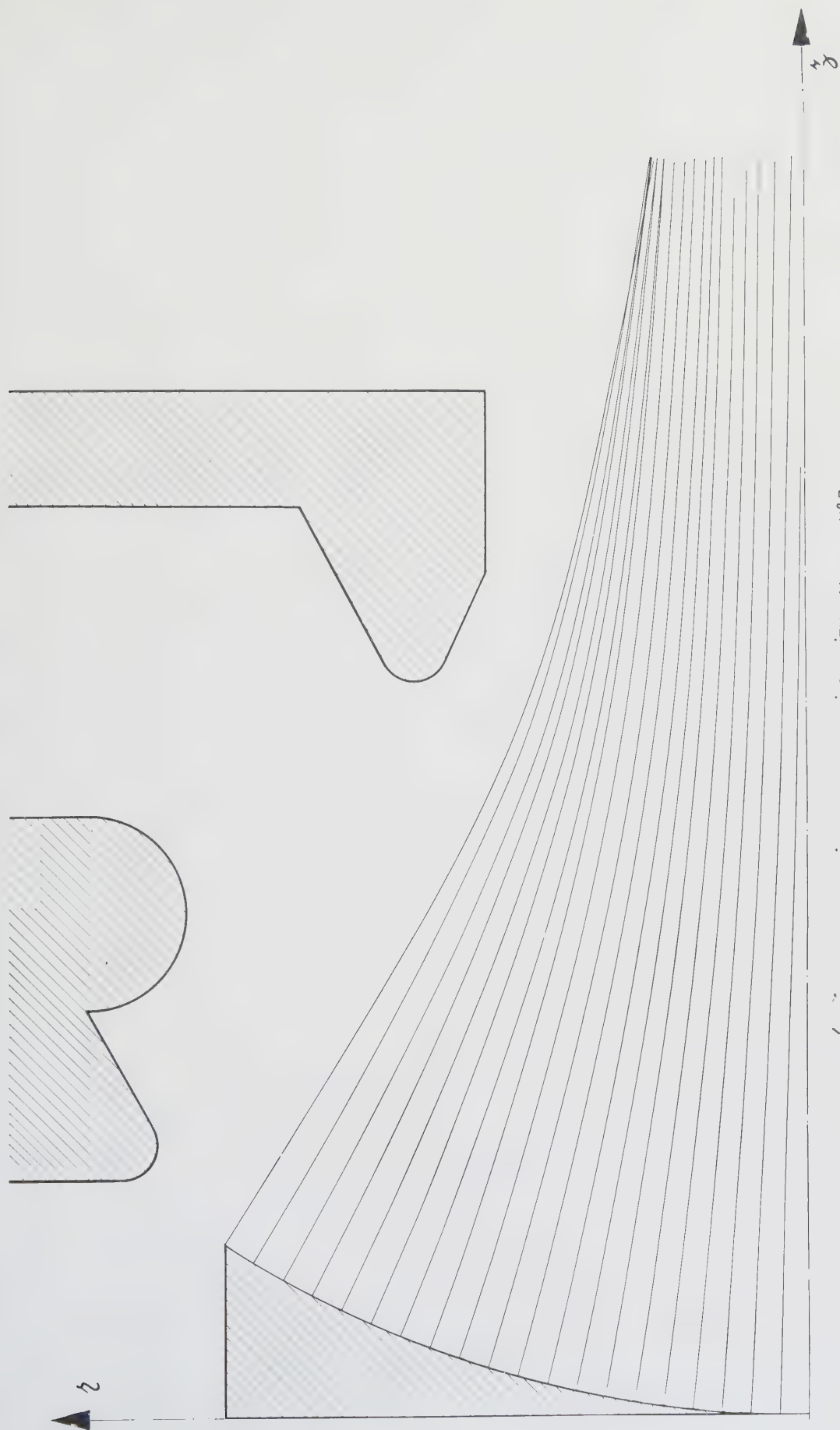
Méthode N° 2 4^{ème} Approximation $J_0 = 15 \text{ A/m}^2$

z

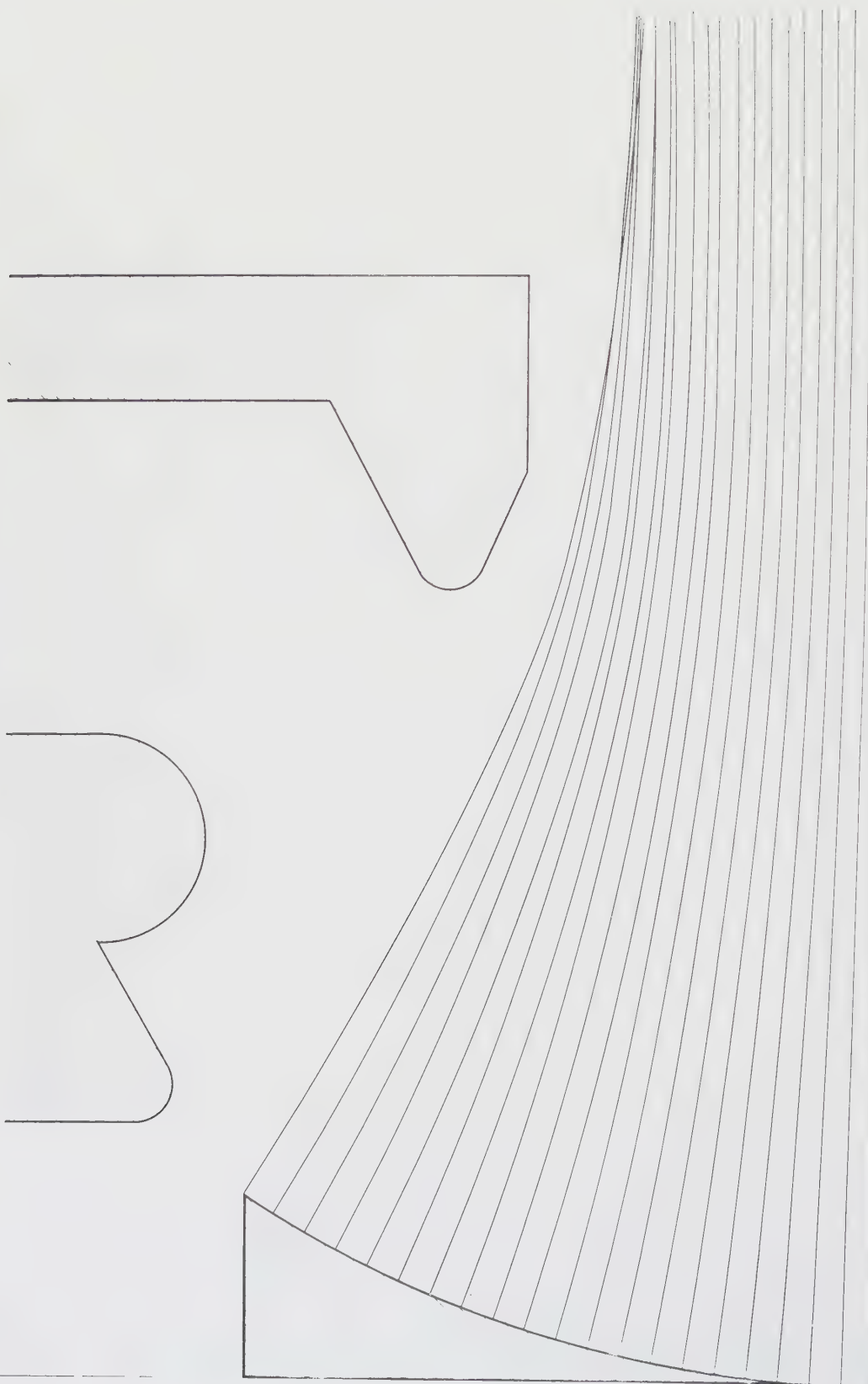


z

RÉSEAU DE TRAJECTOIRES CHAMP POISSONNIEN
Méthode N° 2 1^{ère} Approximation $j_0 = 15 \text{ A/m}^2$



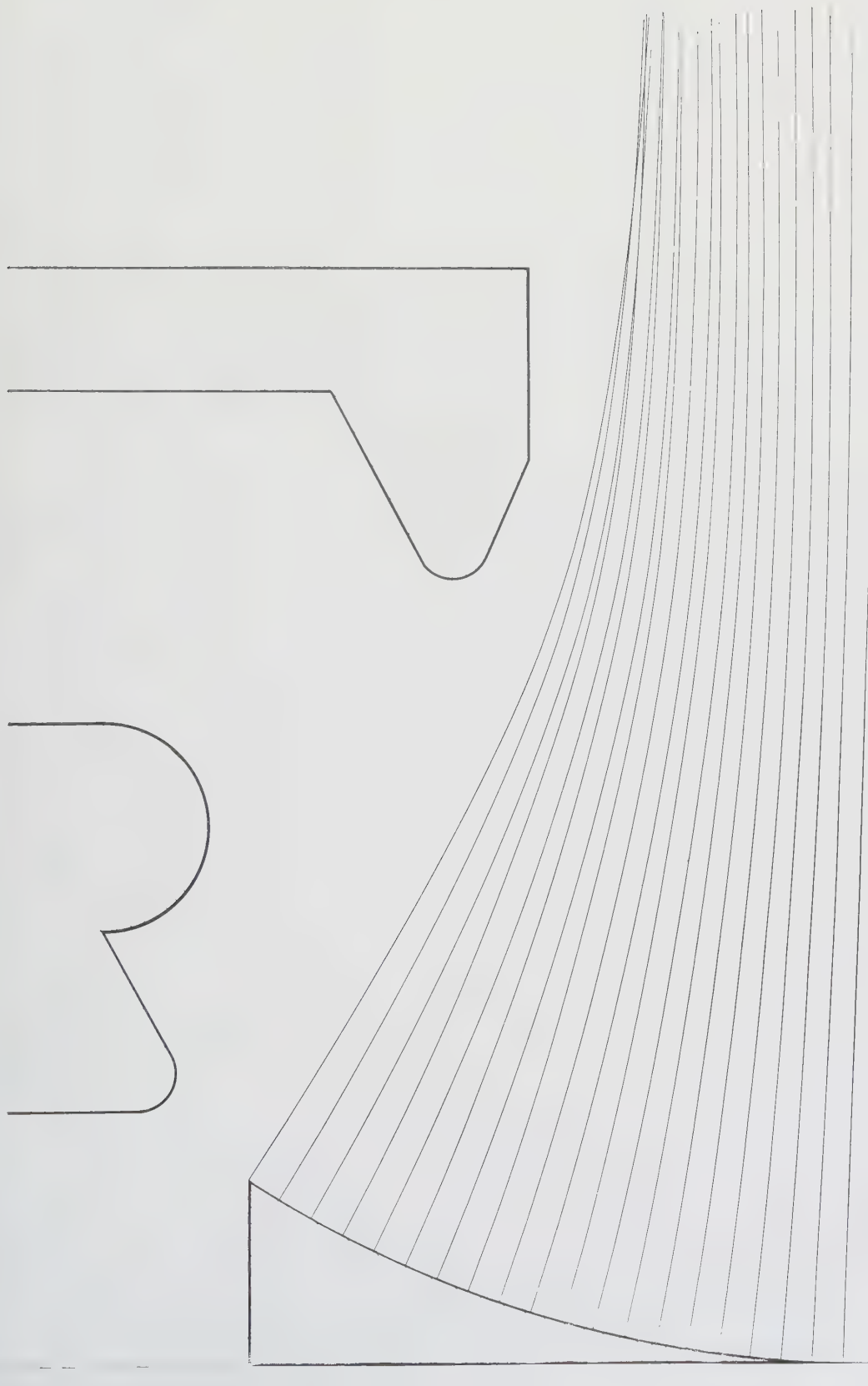
RÉSEAU DE TRAJECTOIRES — CHAMP POISSONNIEN — Méthode N° 3
2^{ème} Approximation $J_0 = 13,55 \text{ A/m}^2$



RÉSEAU DE TRAJECTOIRES - CHAMP POISSONNIEN

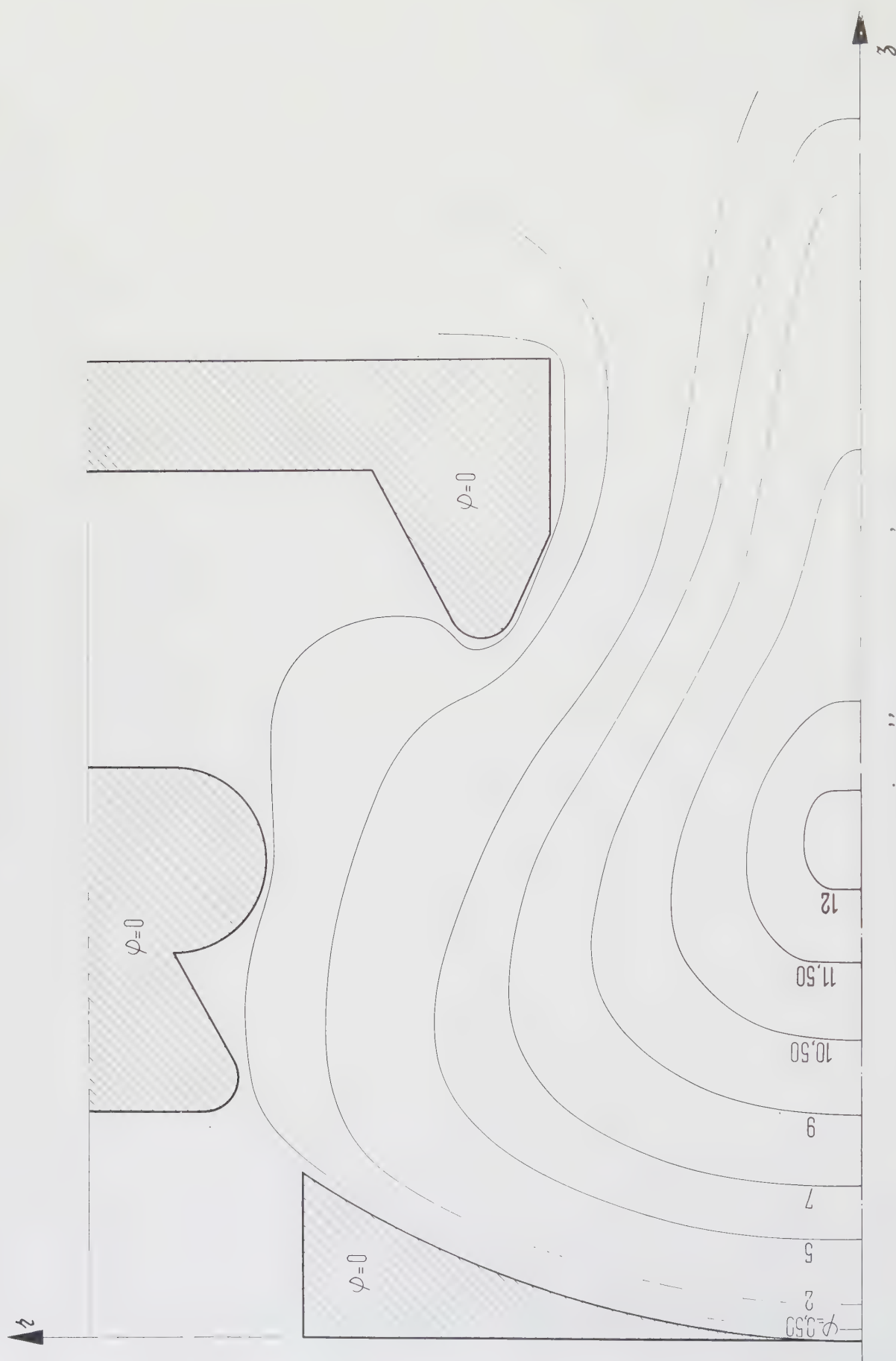
Méthode N°3 3^{ème} Approximation: $J_0 = 21 \text{ A/m}^2$

3

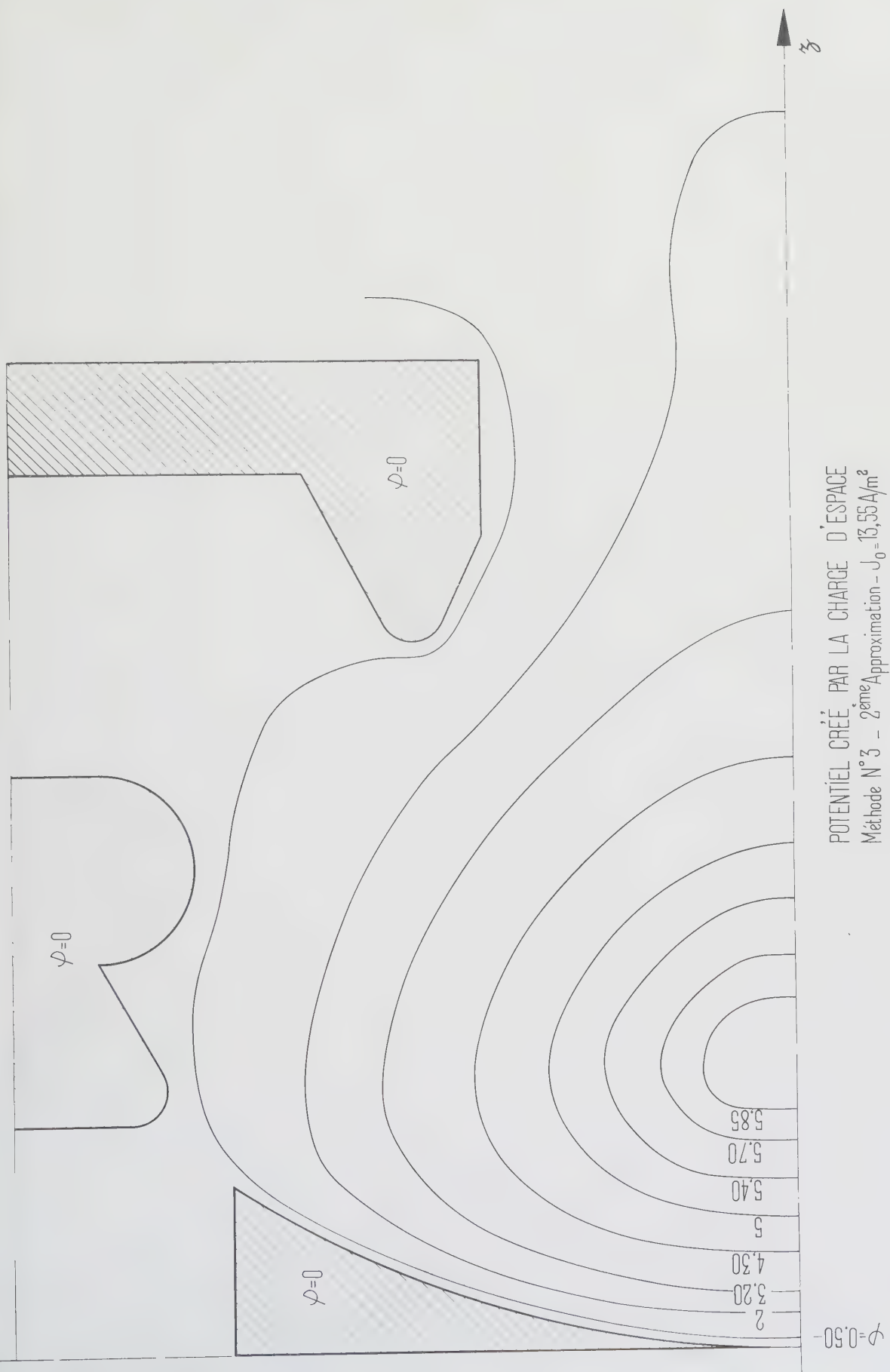


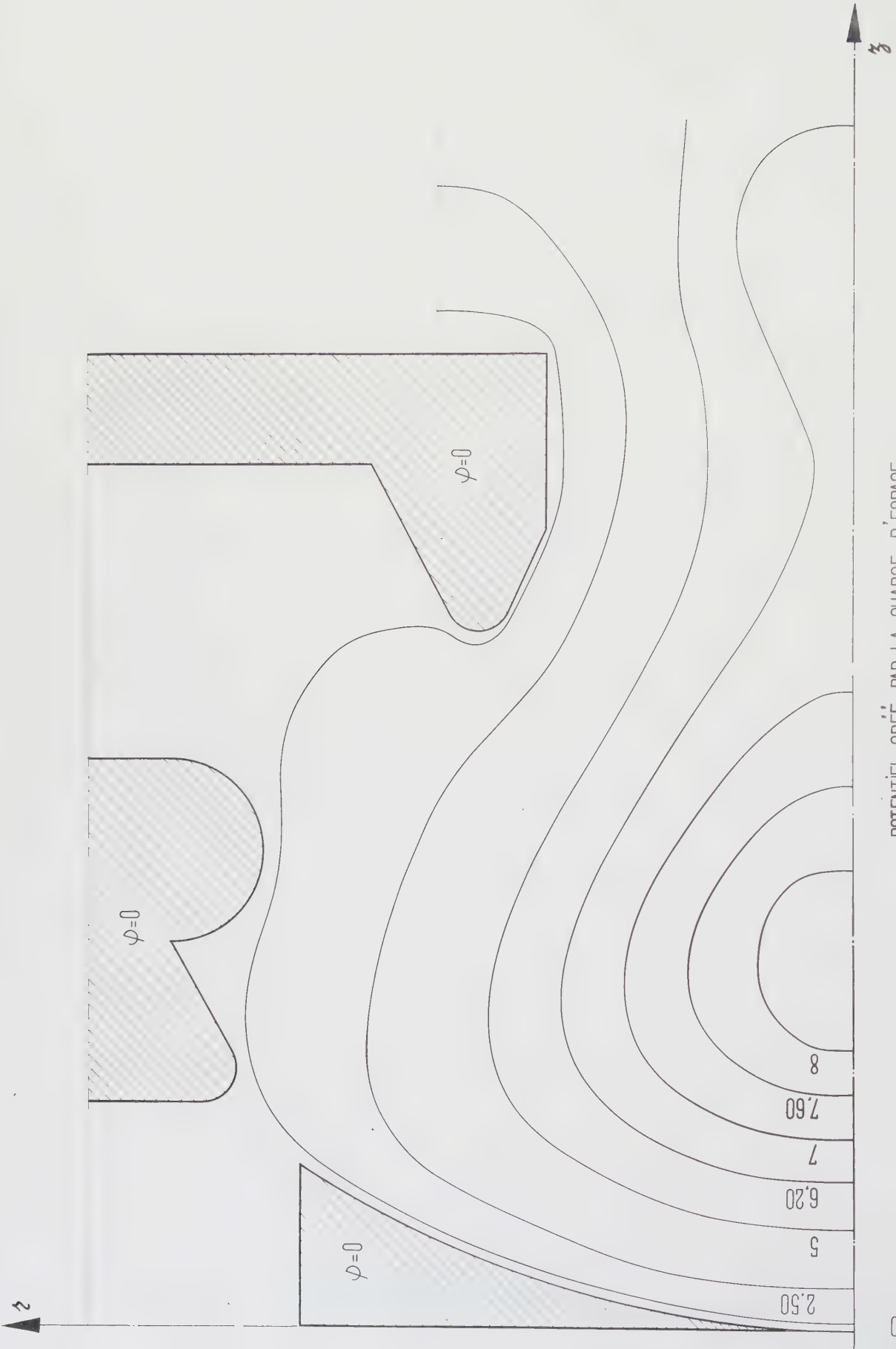
RÉSEAU DE TRAJECTOIRES CHAMP POISSONNIEN

Méthode N° 2 4^{ème} Approximation $\rho_0 = 15 \text{ A/m}^2$



POTENTIEL CRÉÉ PAR LA CHARGE D'ESPACE
Méthode N°3 - 1^{ère} Approximation - $J_0 = 31,6 \text{ A/m}^2$

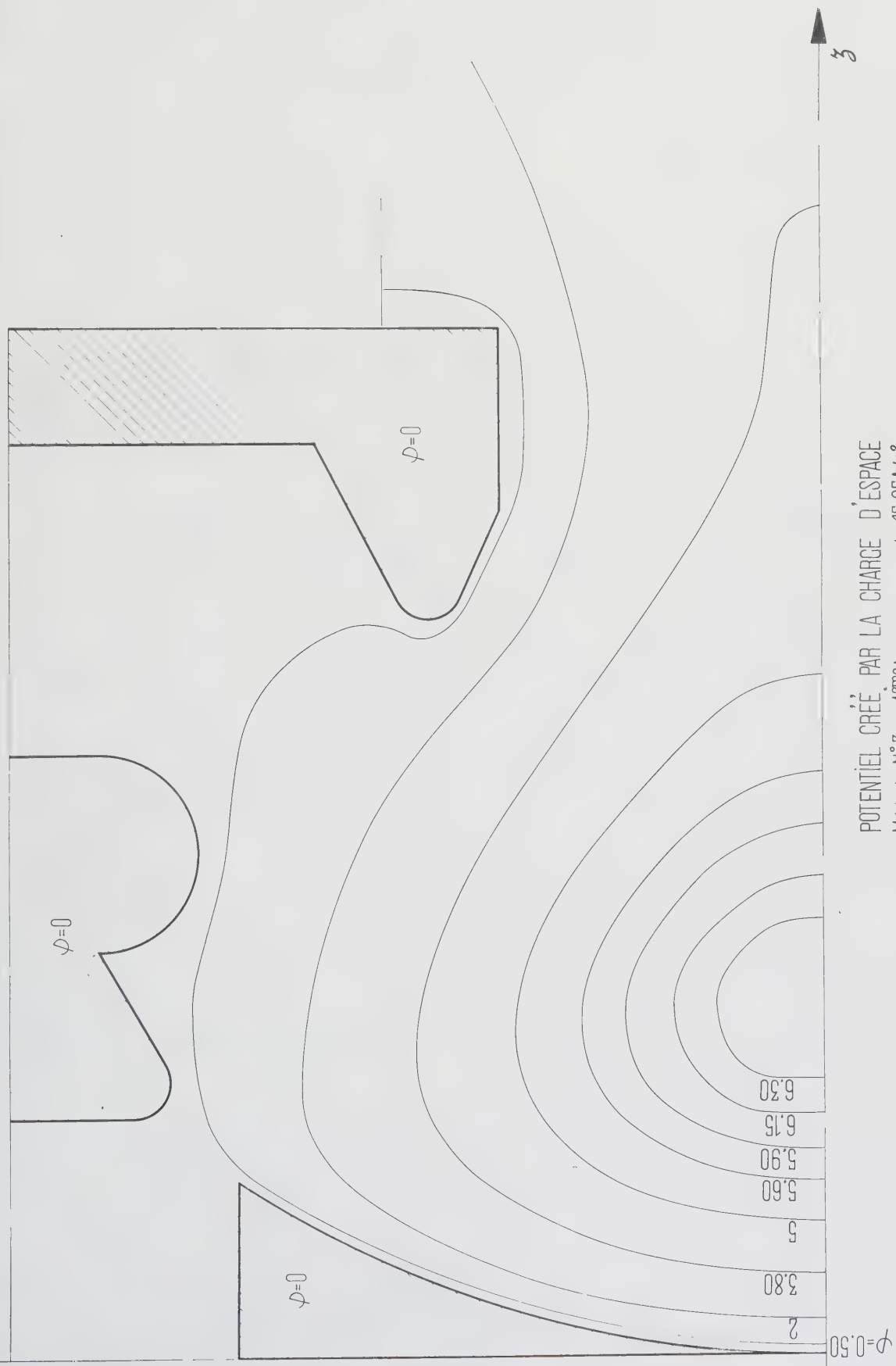




POTENTIEL CRÉÉ PAR LA CHARGE D'ESPACE
Méthode N°3 - 3^{ème} Approximation - $J_0 = 21 \text{ A/m}^2$

$\phi = 0.50$

2



POTENTIEL CRÉÉ PAR LA CHARGE D'ESPACE
Méthode N° 3 - 4ème Approximation - $J_0 = 15,25A/m^2$

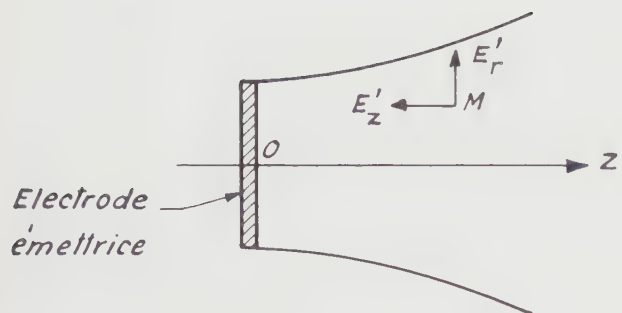


fig. 1

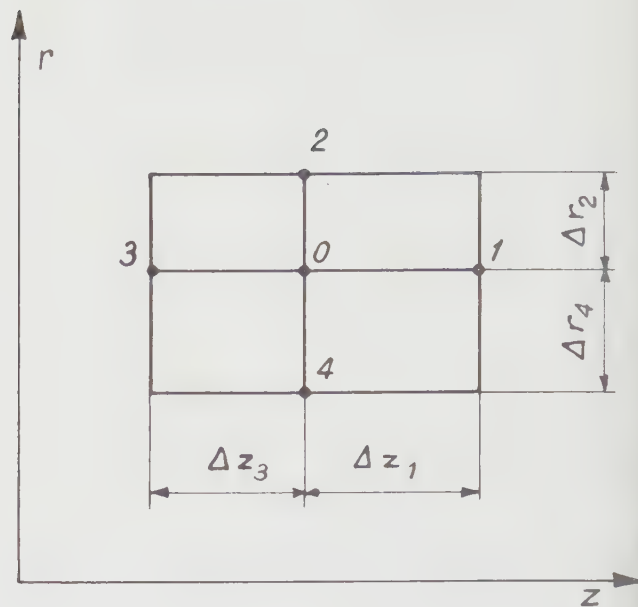


fig. 2

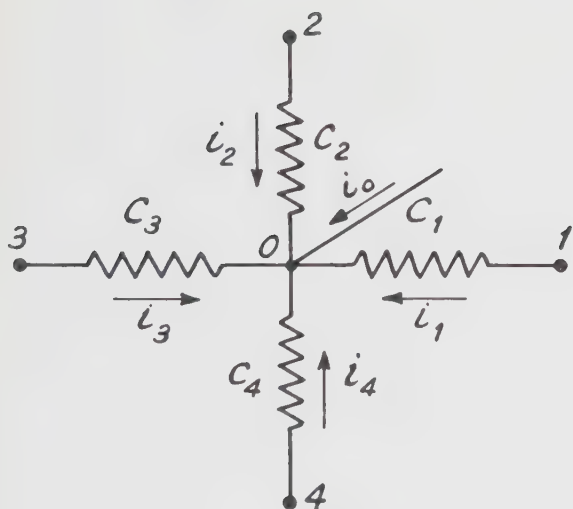


fig. 3

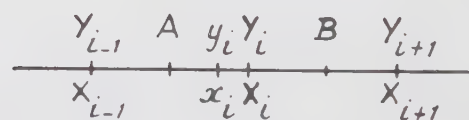
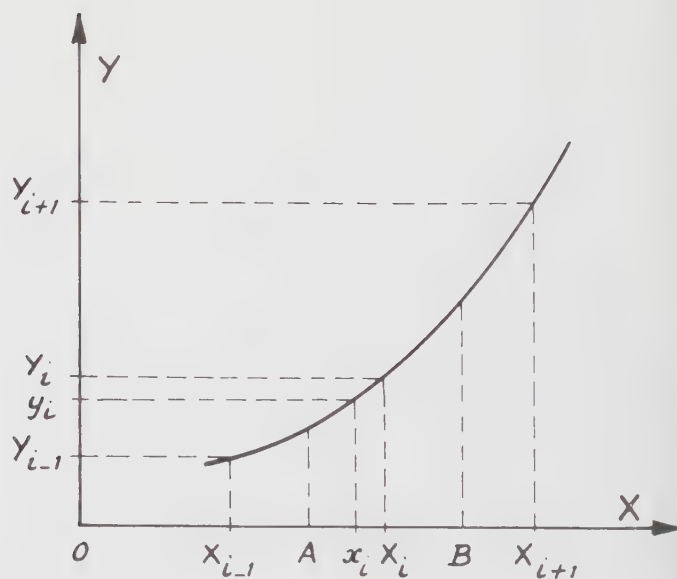


fig. 4

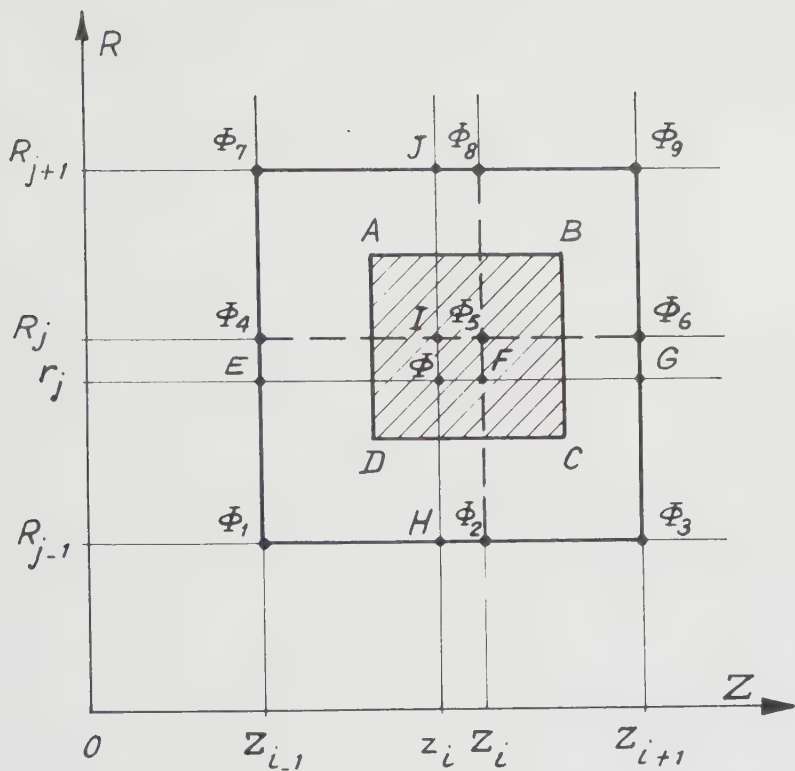


fig. 5

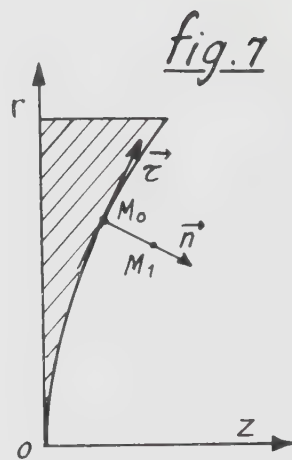


fig. 7

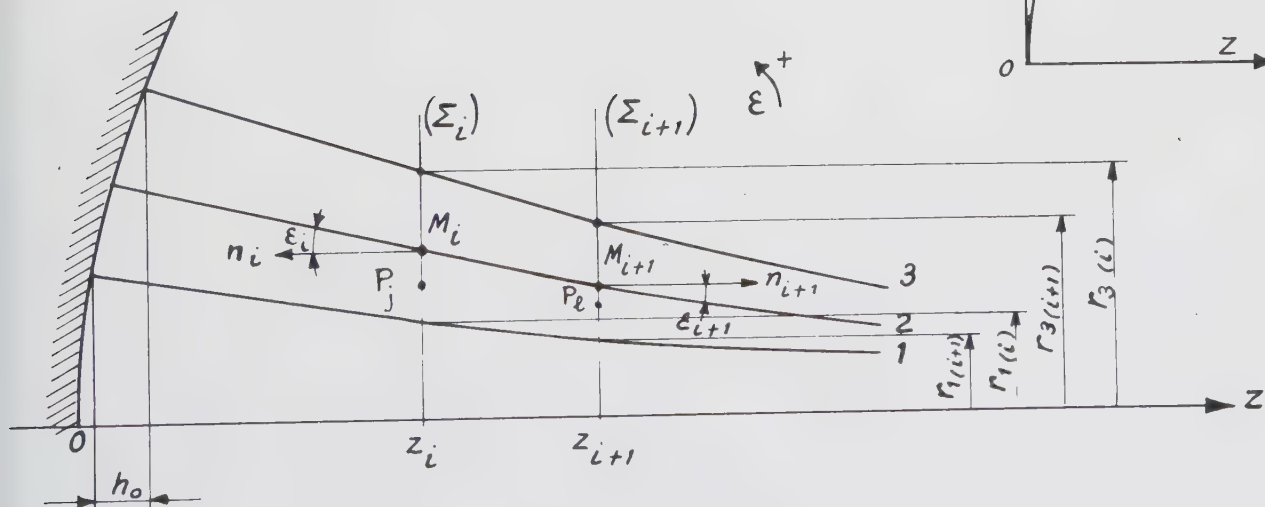


fig. 6

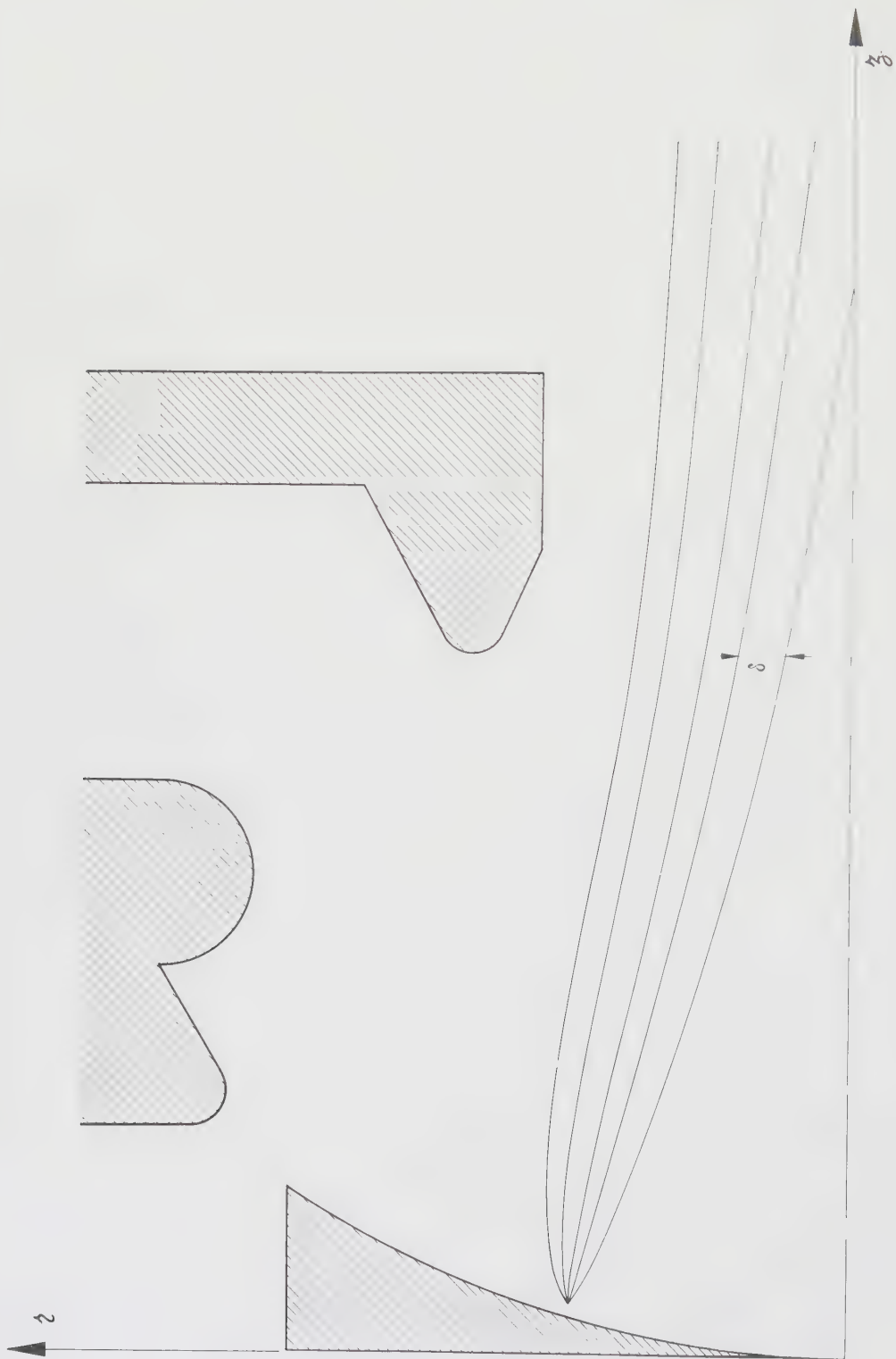


fig. 8

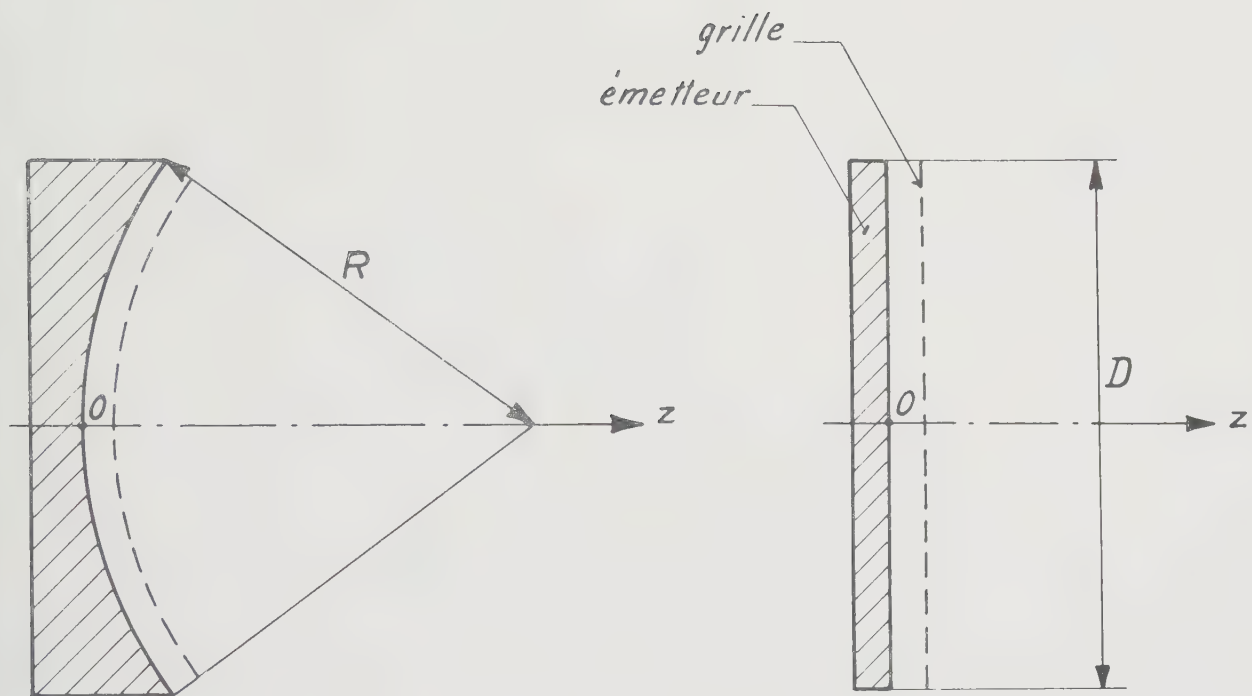


fig. 9

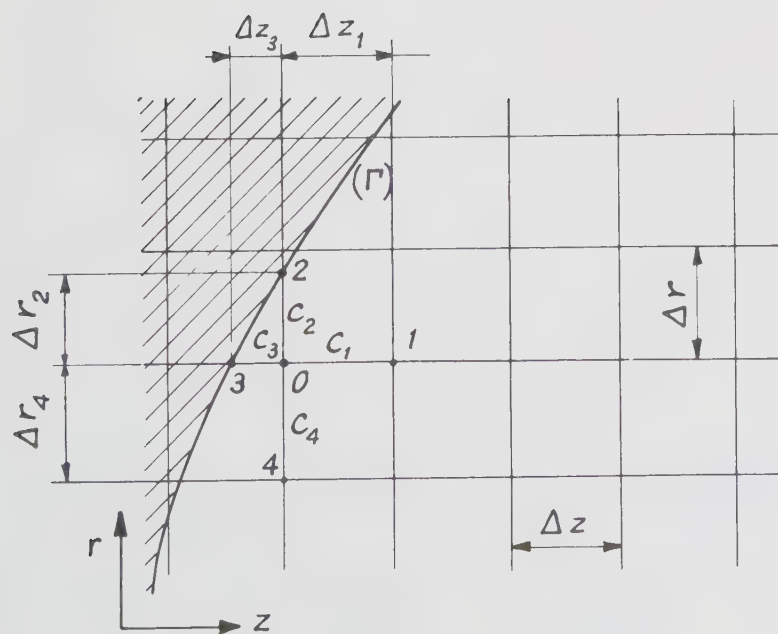


fig. 10

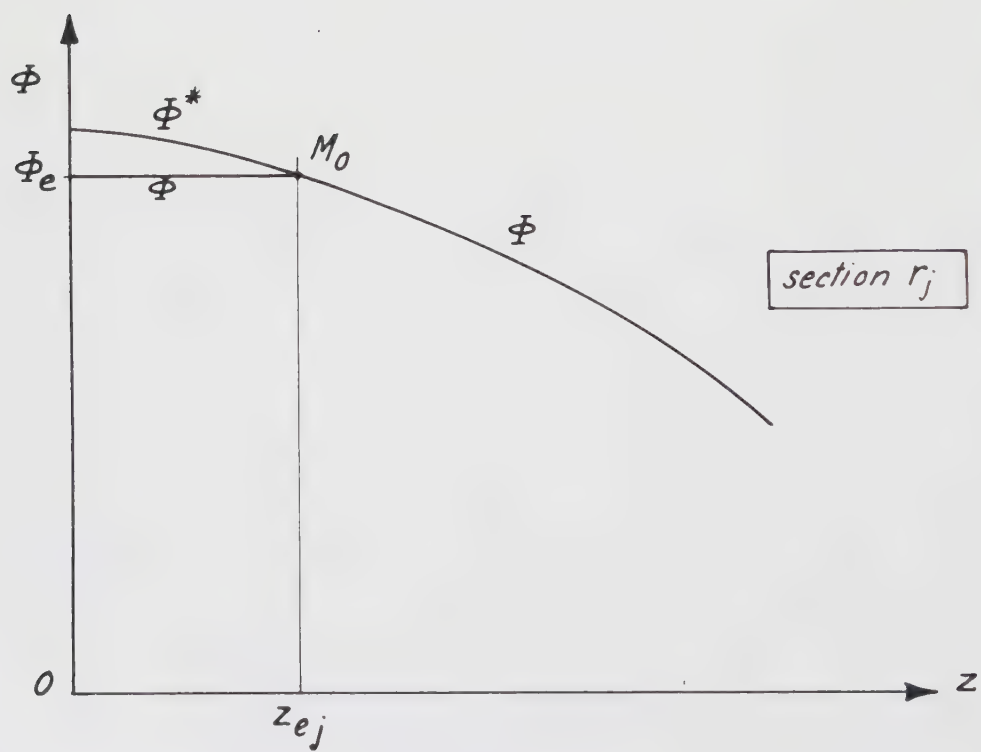
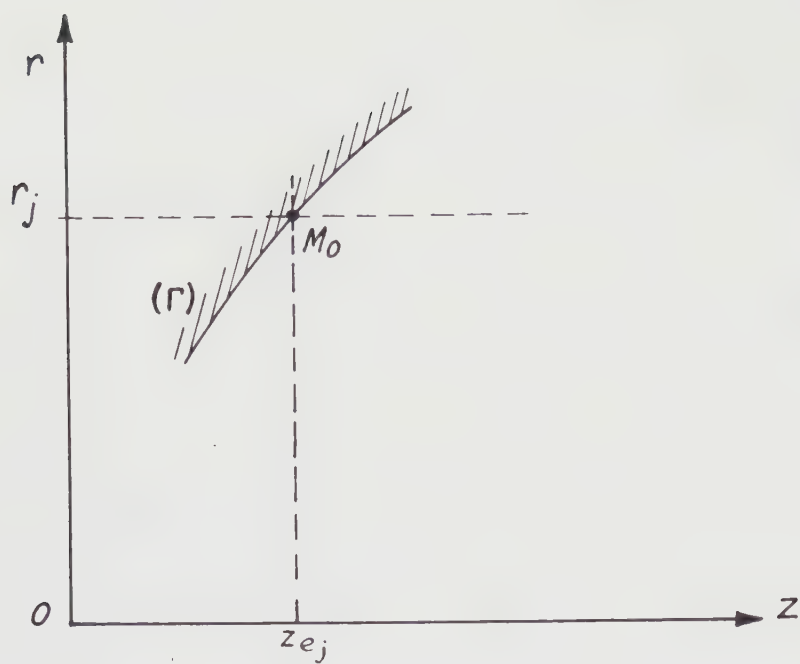


fig. 11

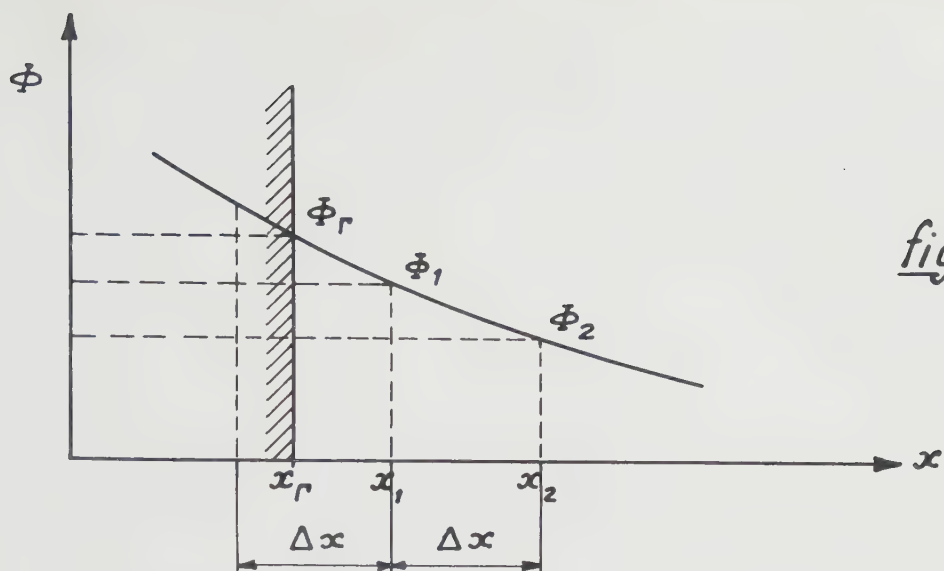


fig. 12

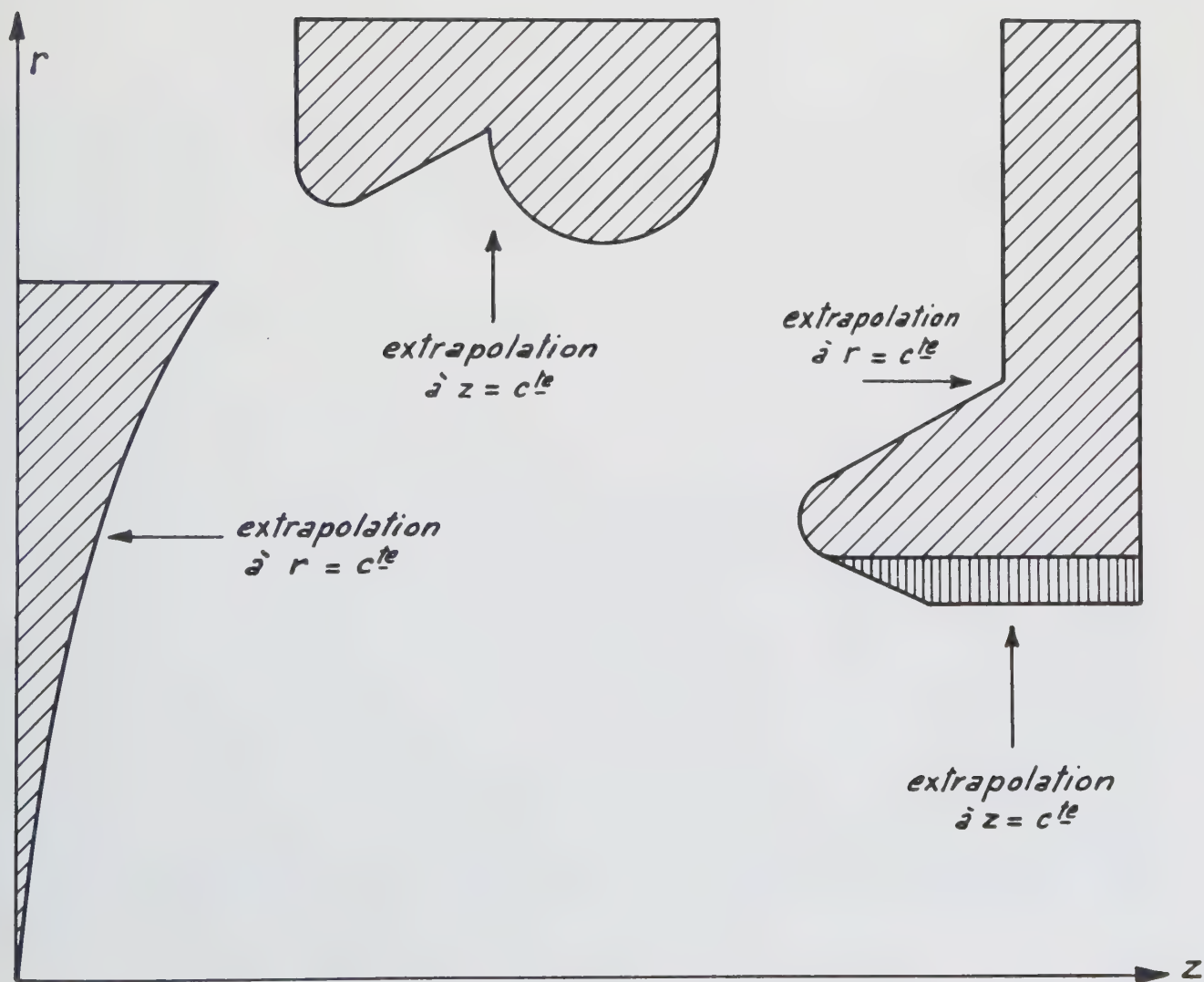
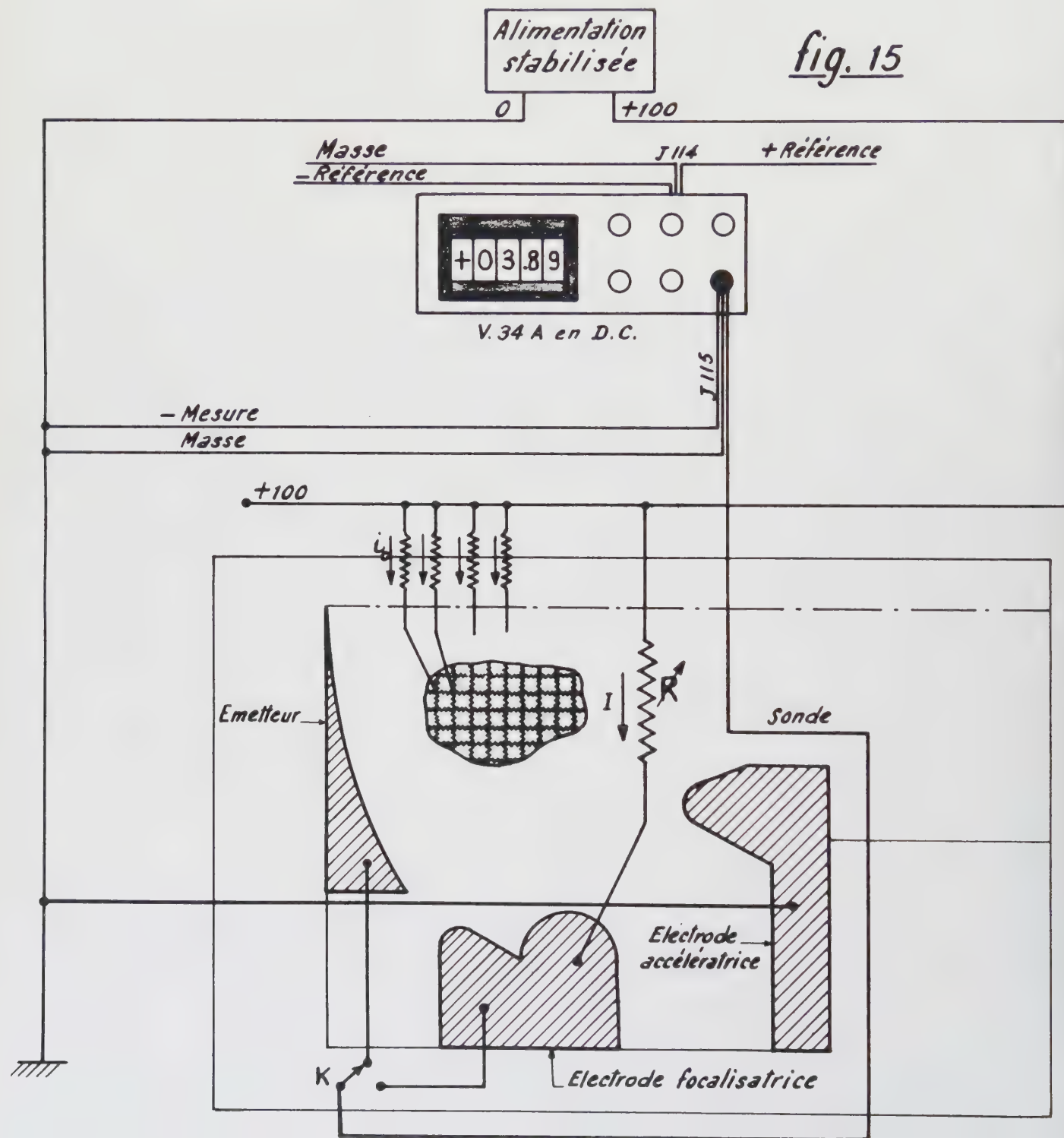
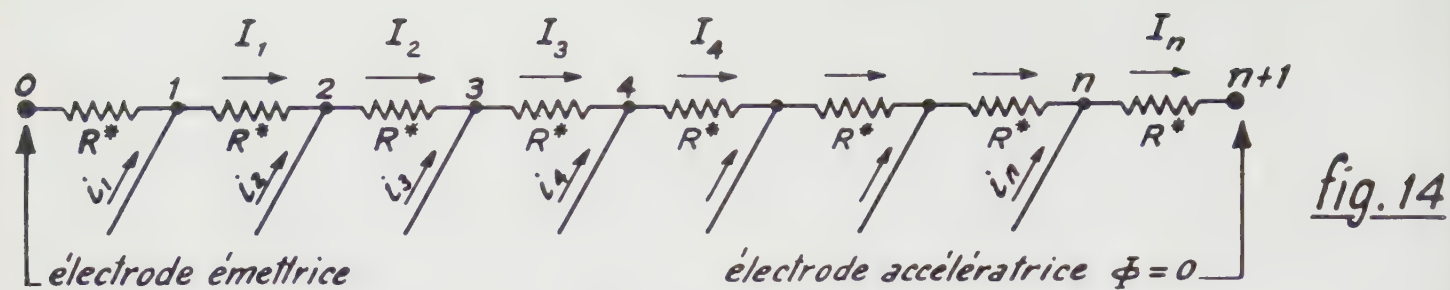


fig. 13



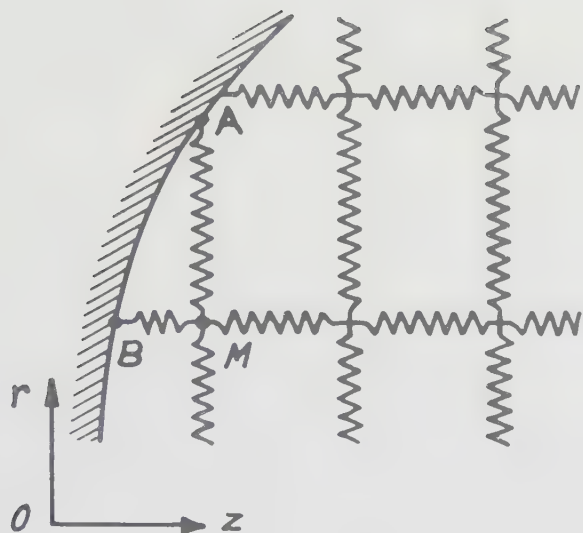


fig. 16

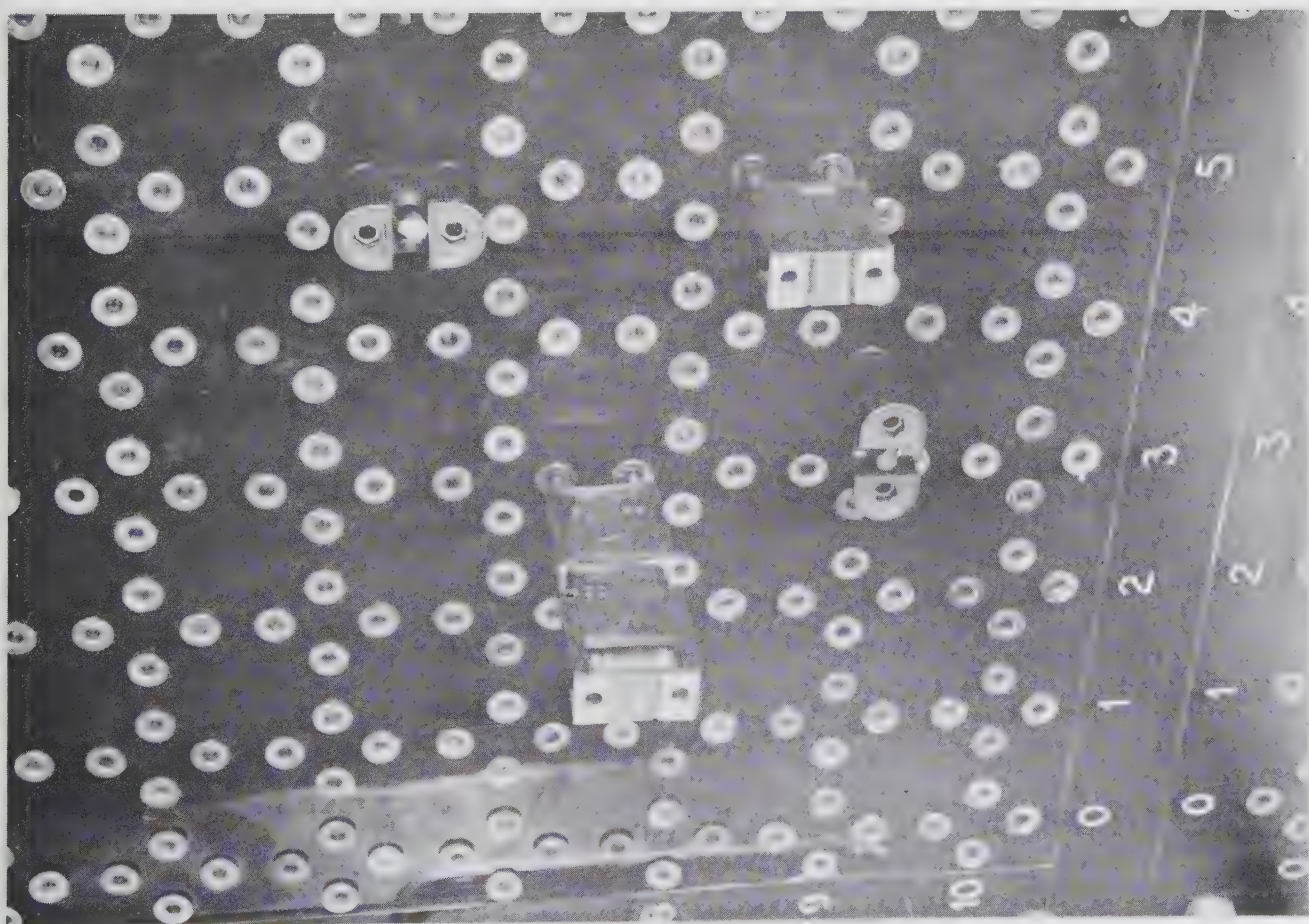


fig. 17

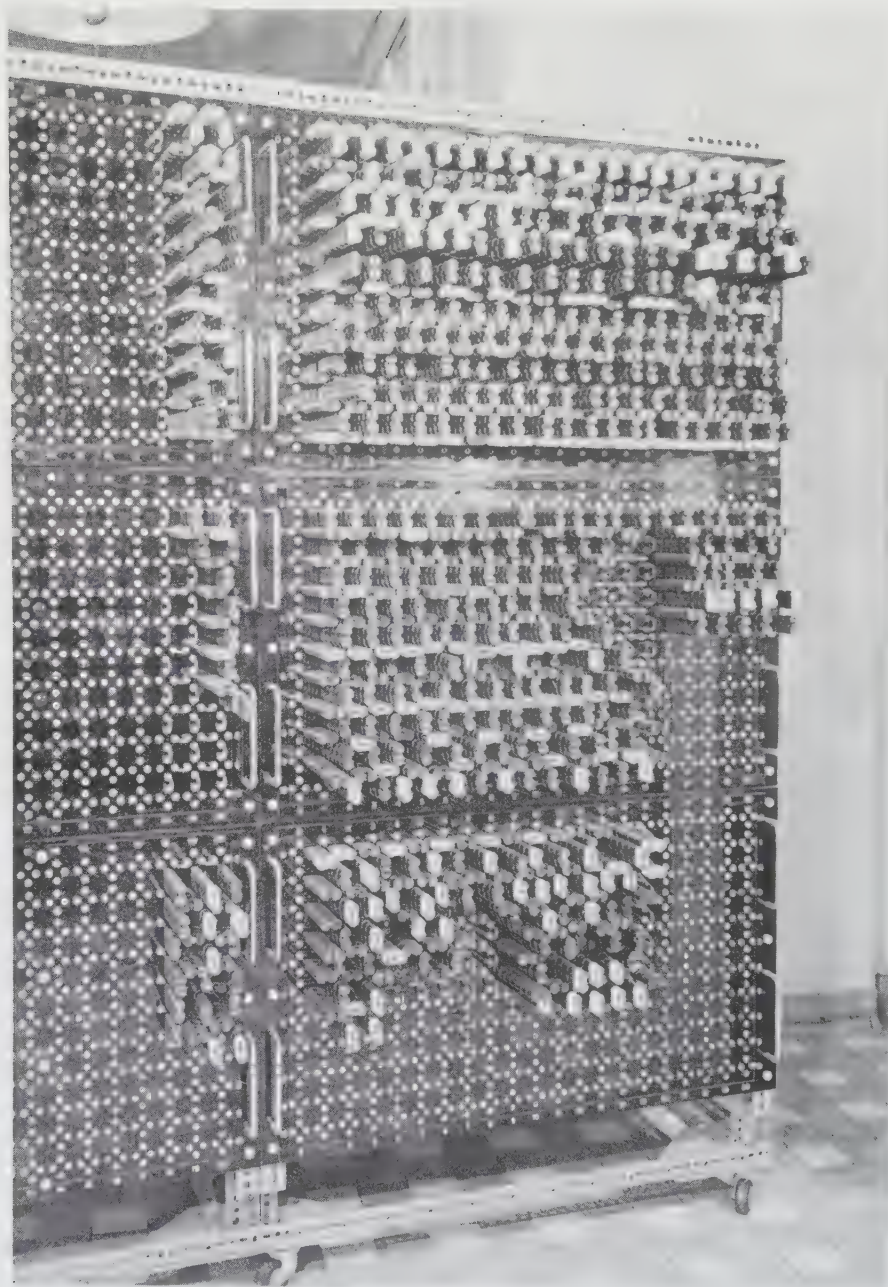


fig. 18

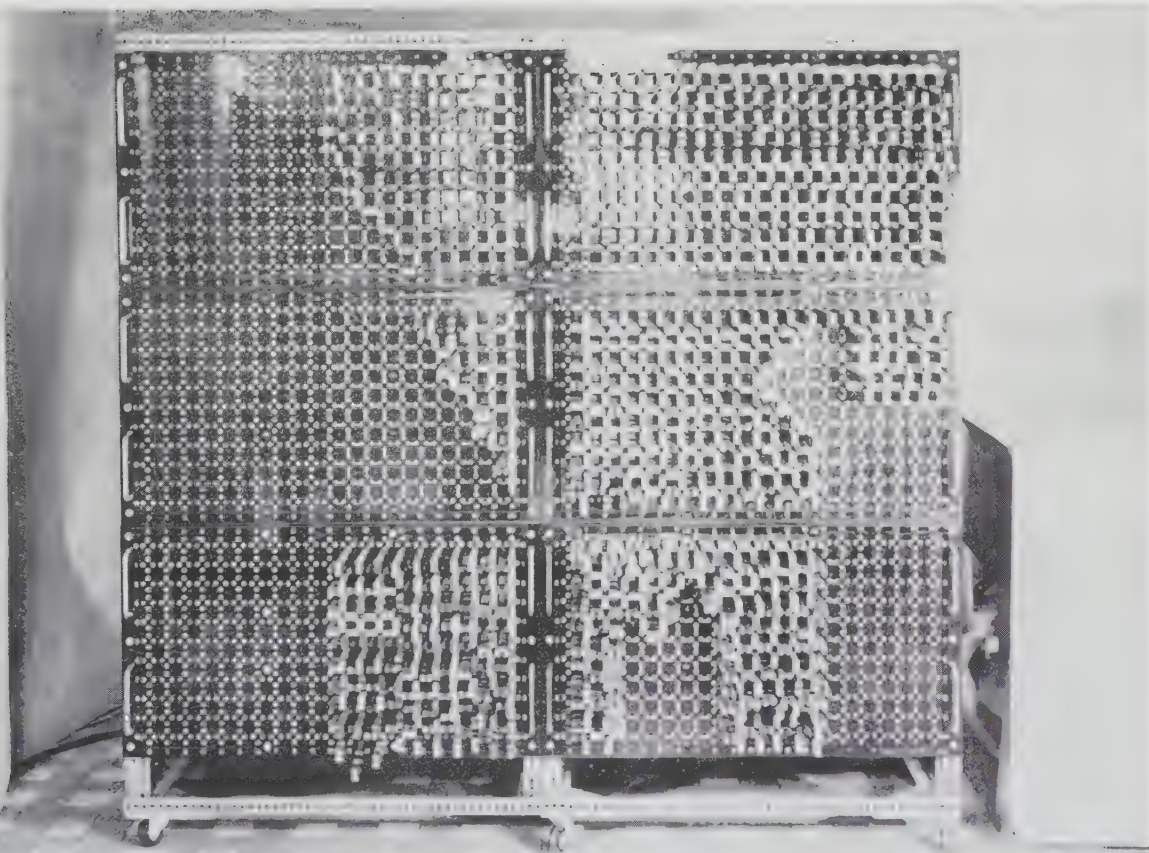


fig. 18^{bis}

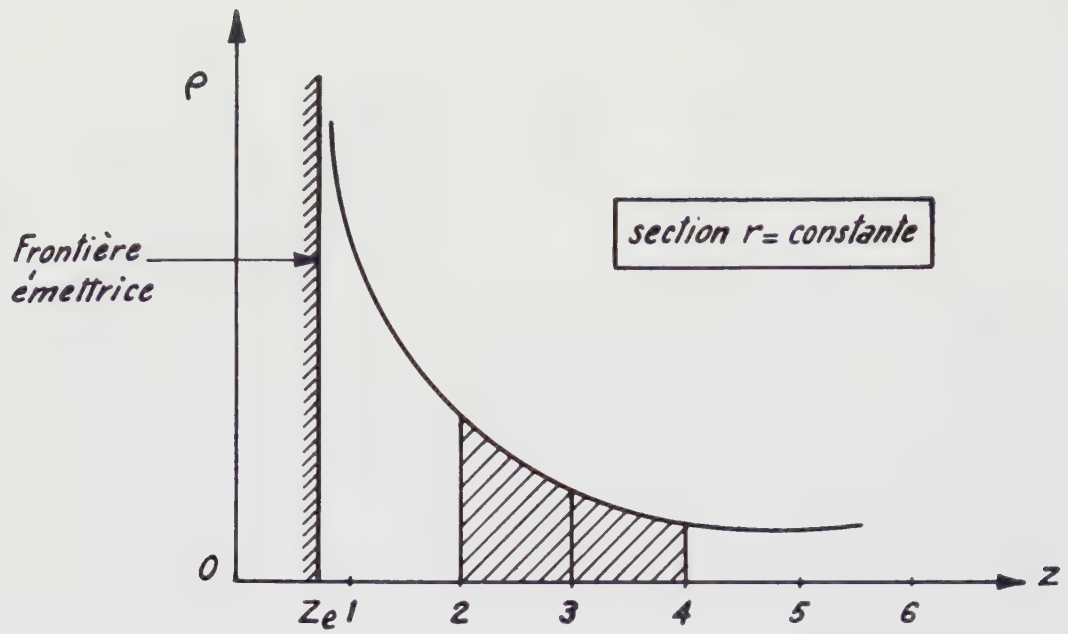


fig. 19

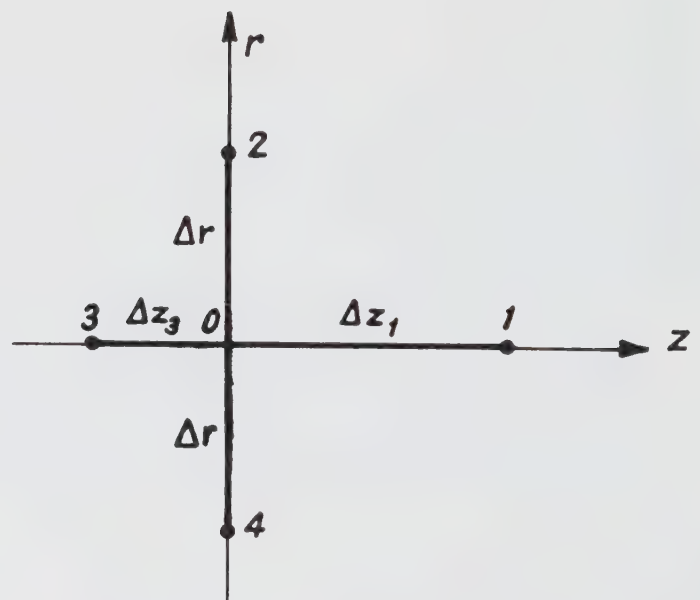


fig. 20

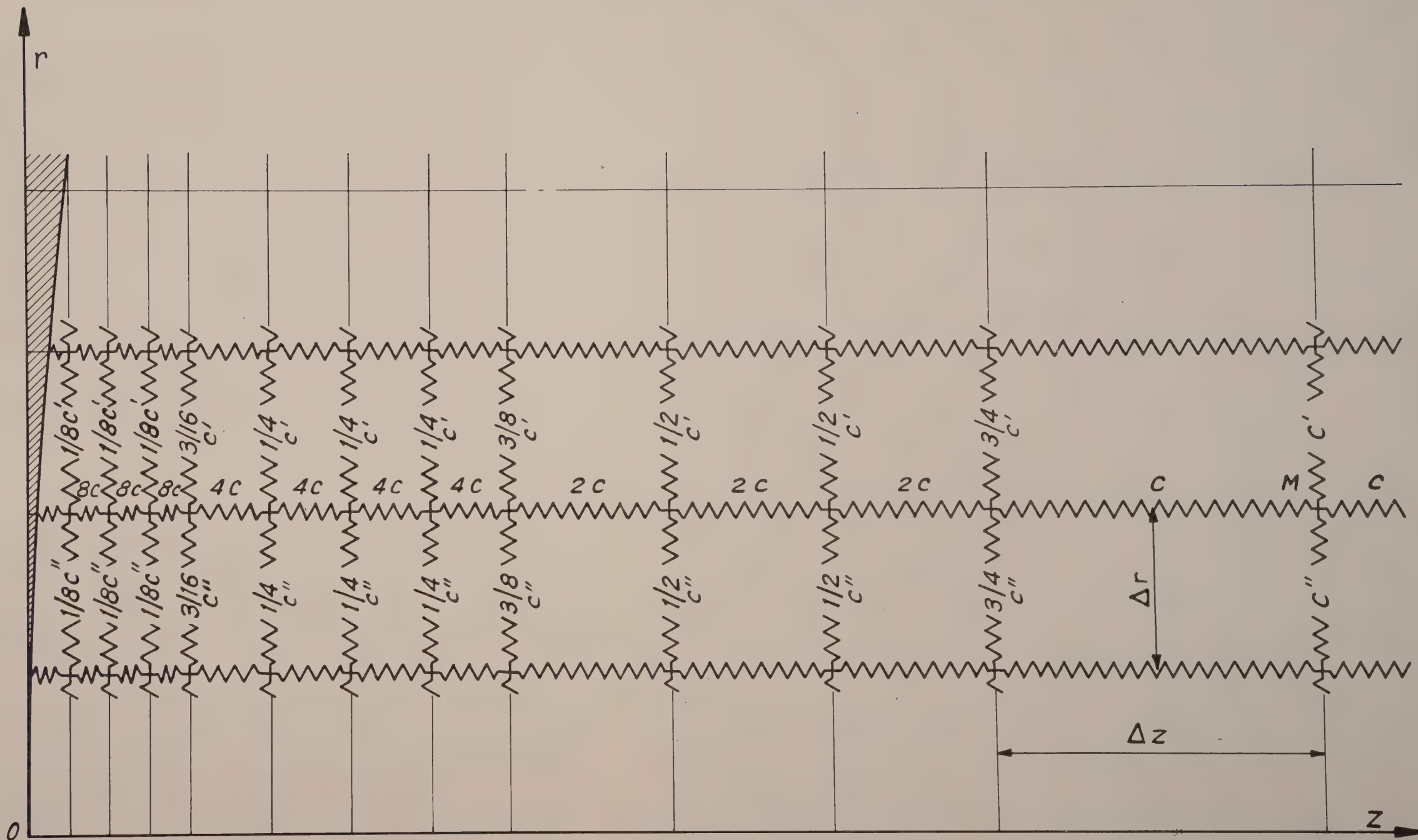




fig. 22

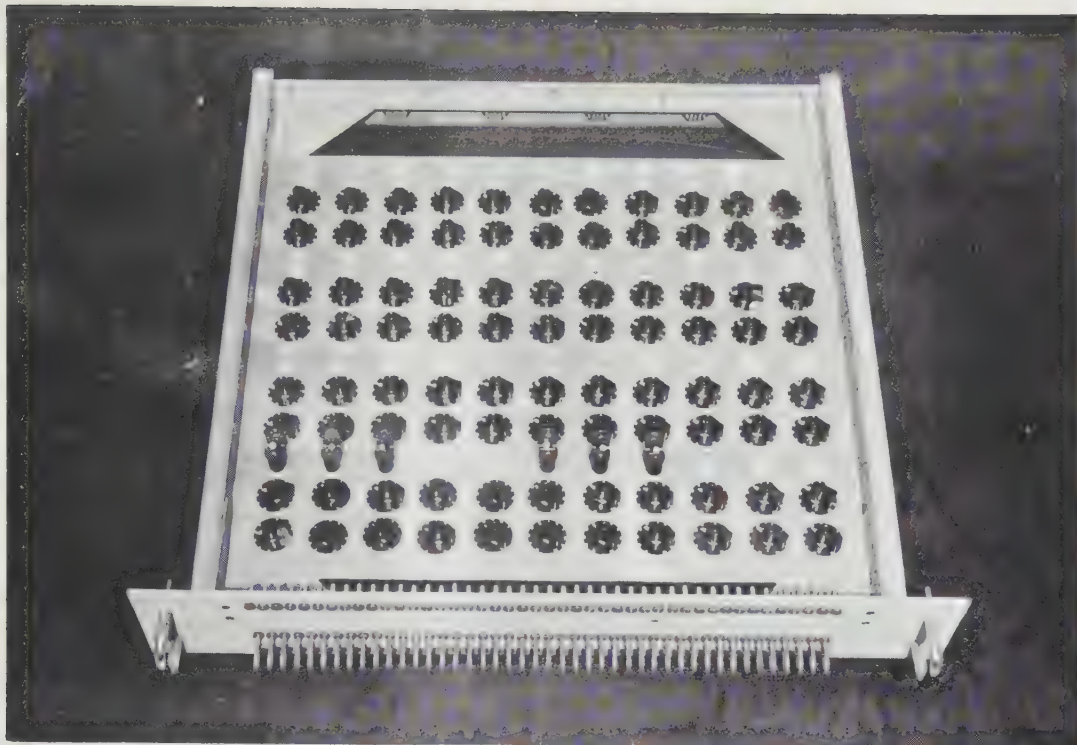


fig. 23

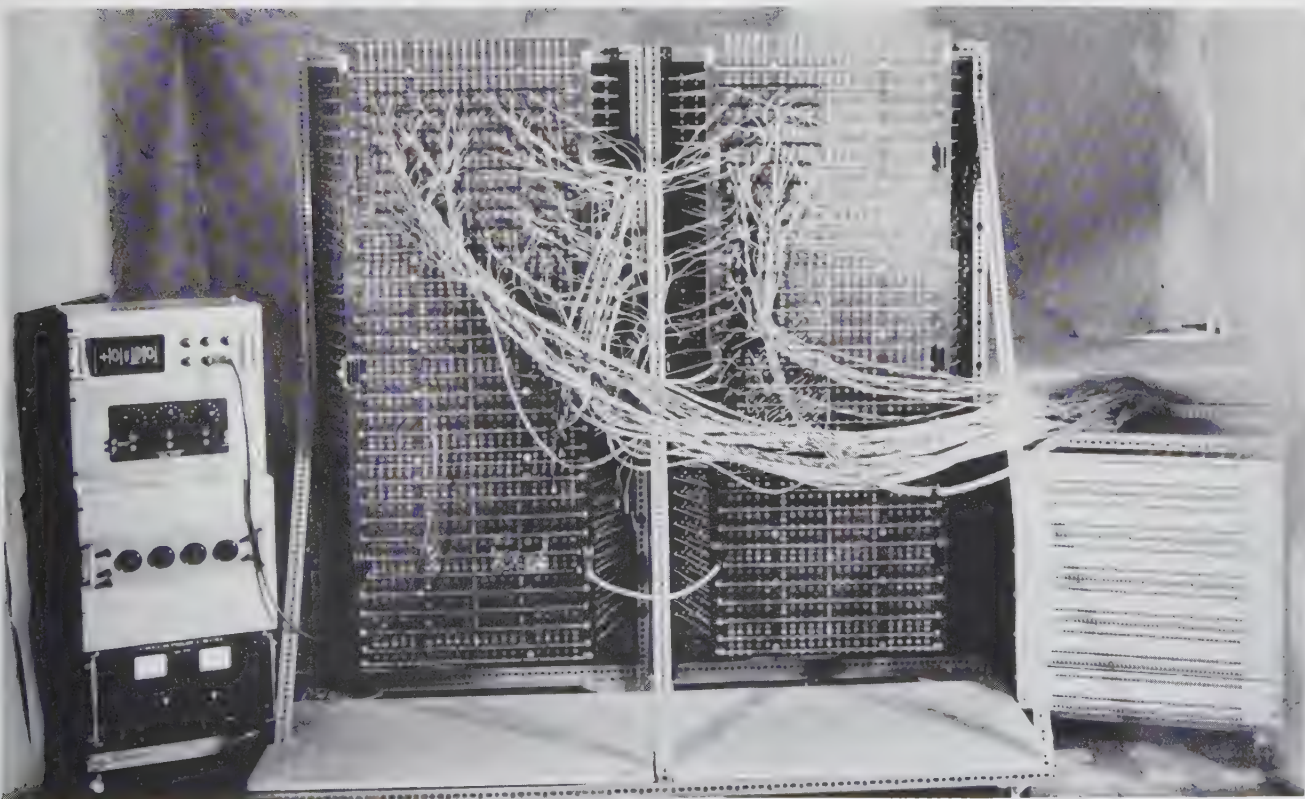


fig. 25

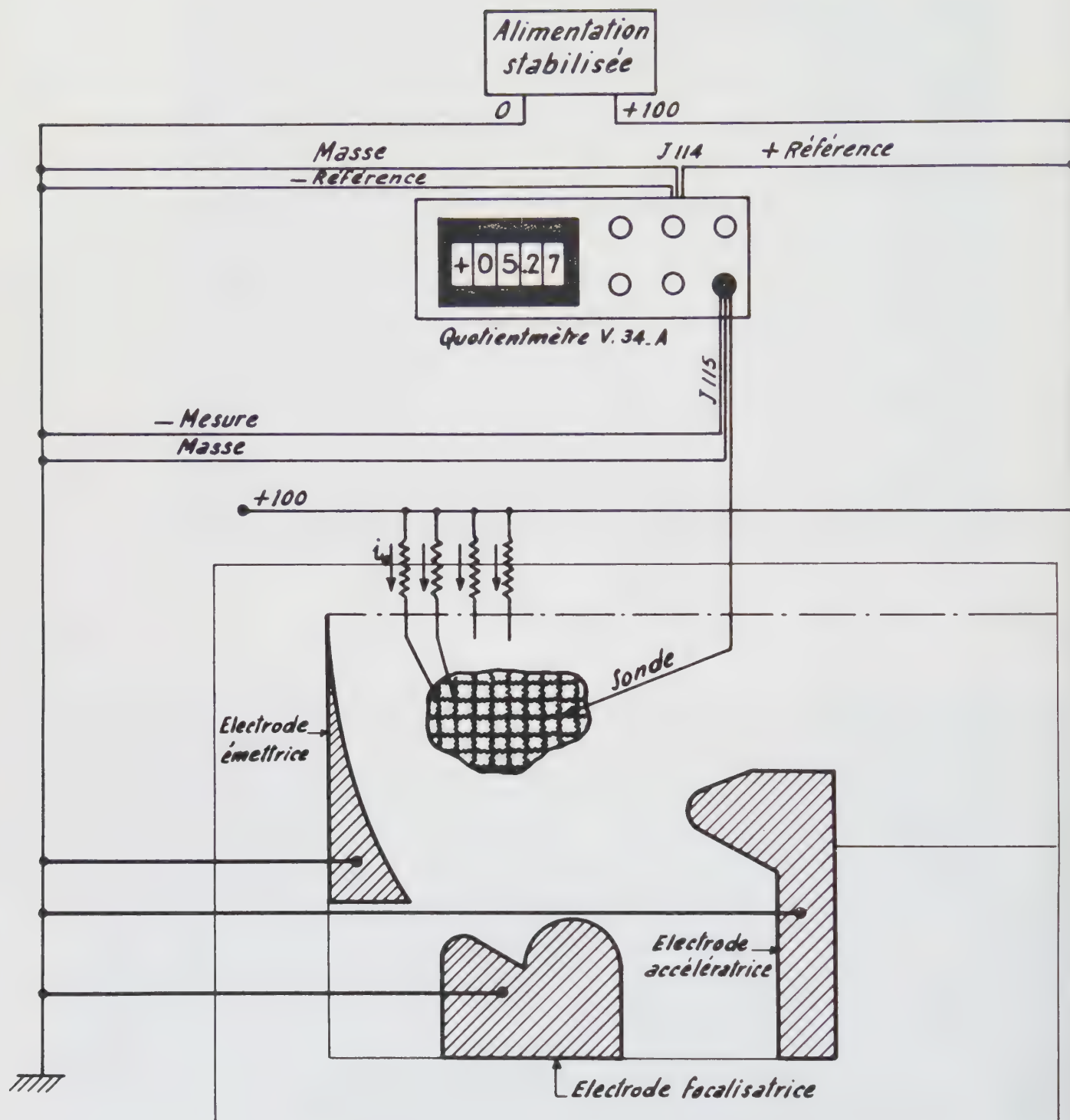


fig. 24

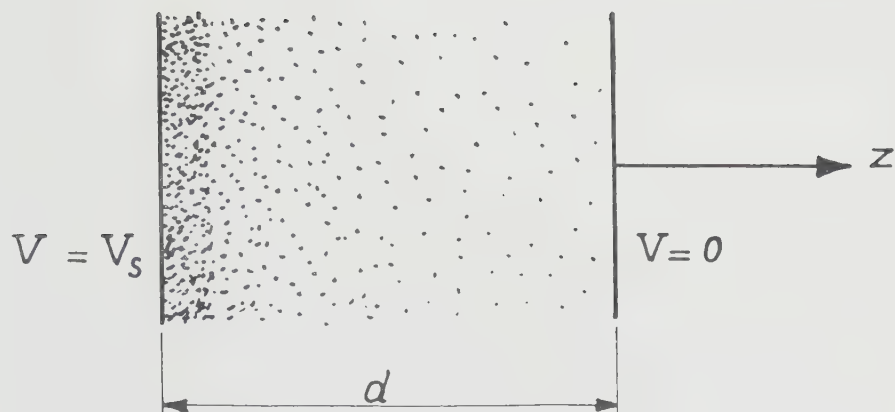


fig. 26

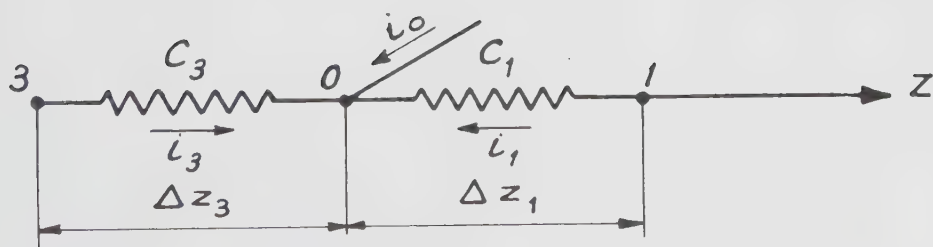


fig. 27

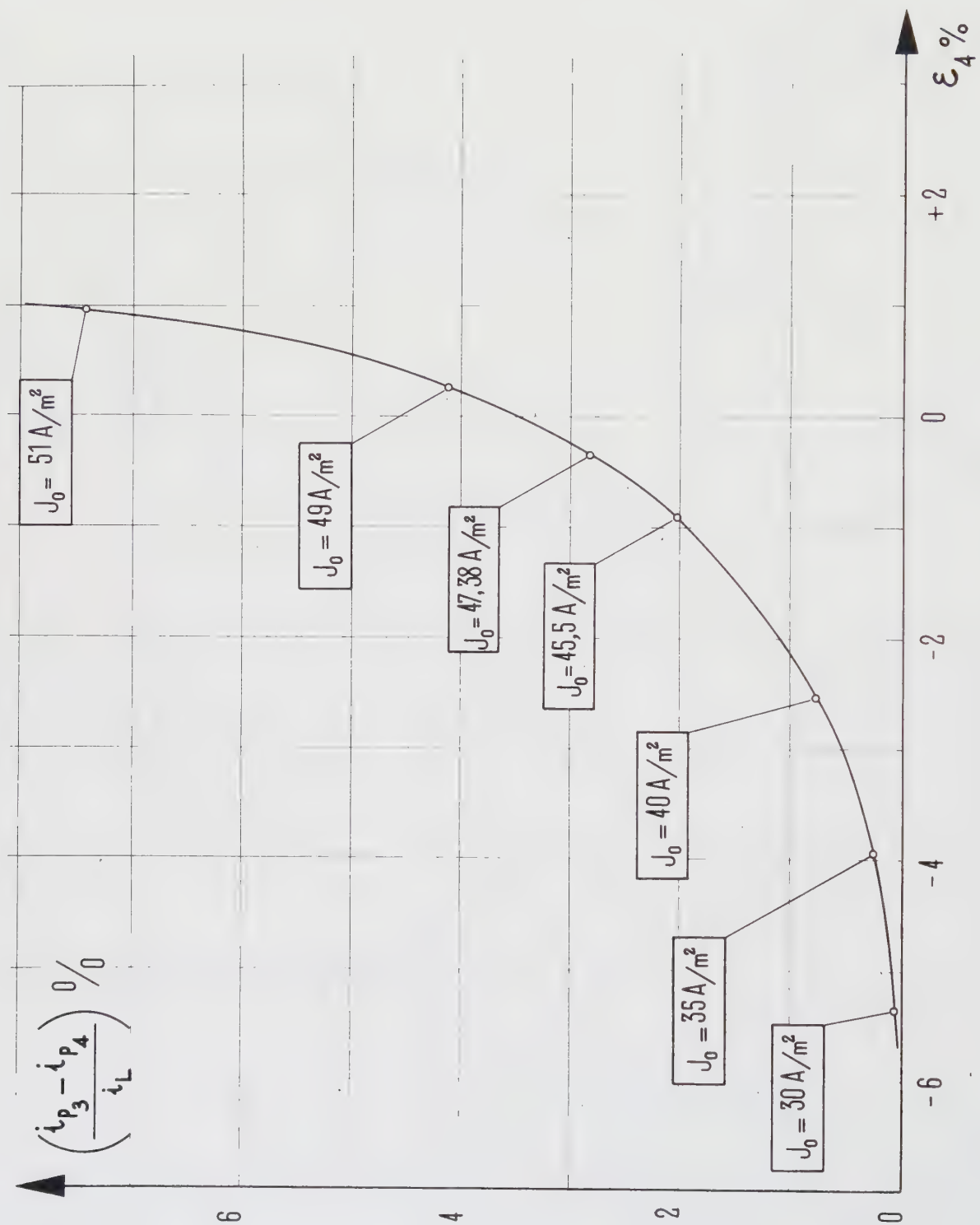


fig. 28

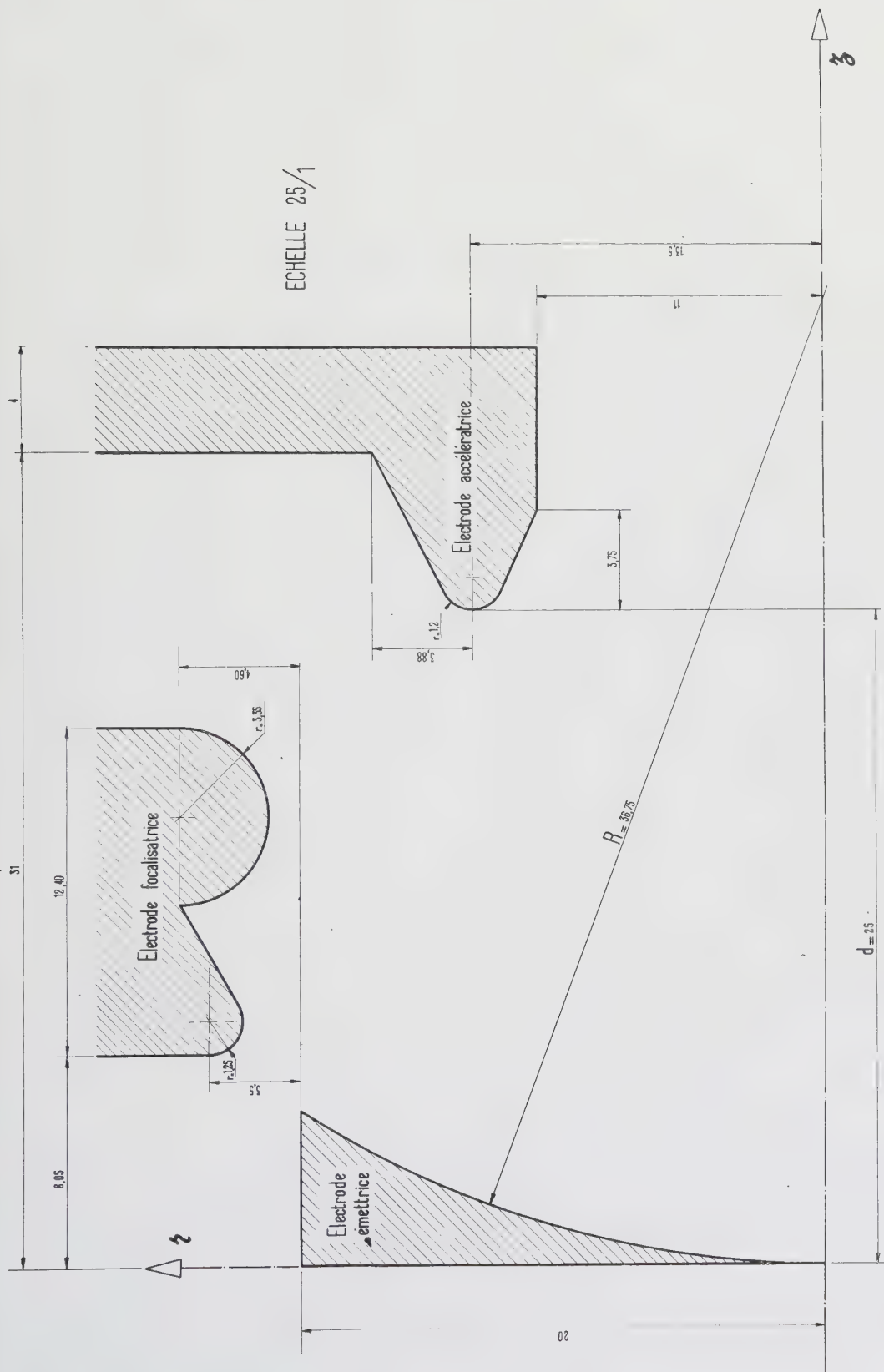
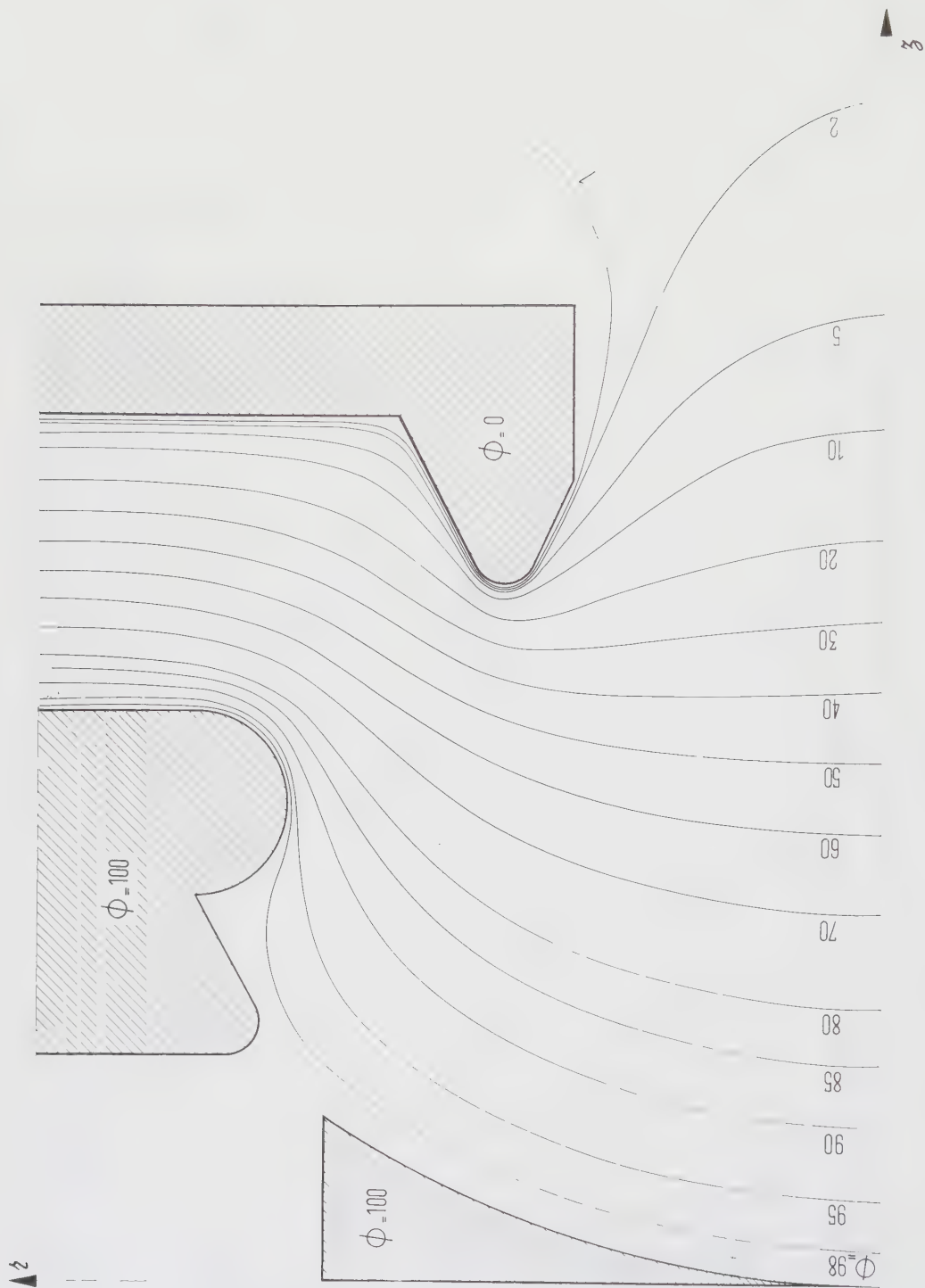


fig. 29



CHAMP LAPLACIEN — RÉSEAU D'ÉQUIPOTENTIELLES

fig.30



RÉSEAU DE TRAJECTOIRES — CHAMP LAPLACIEN

fig. 31

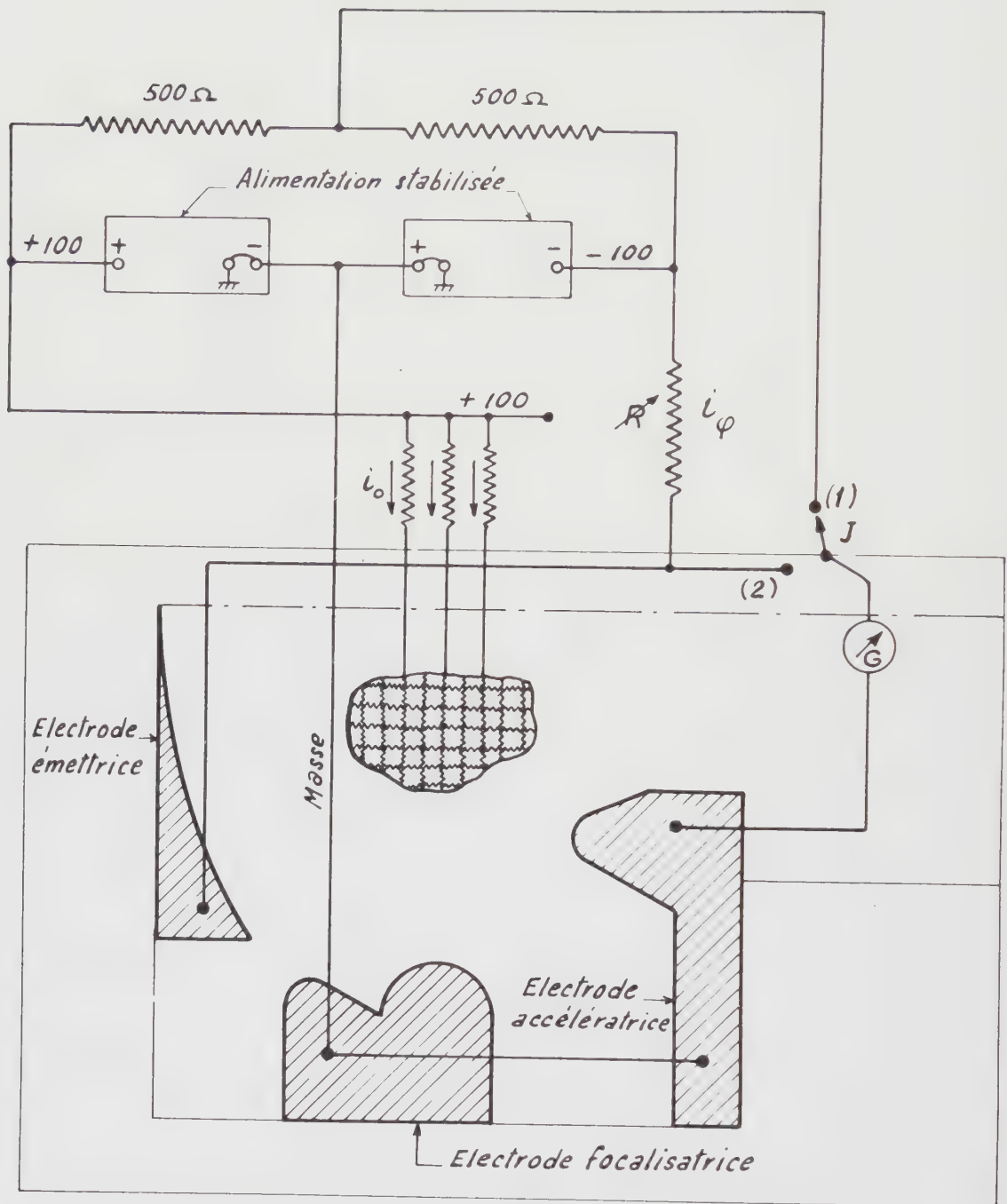


fig. 32

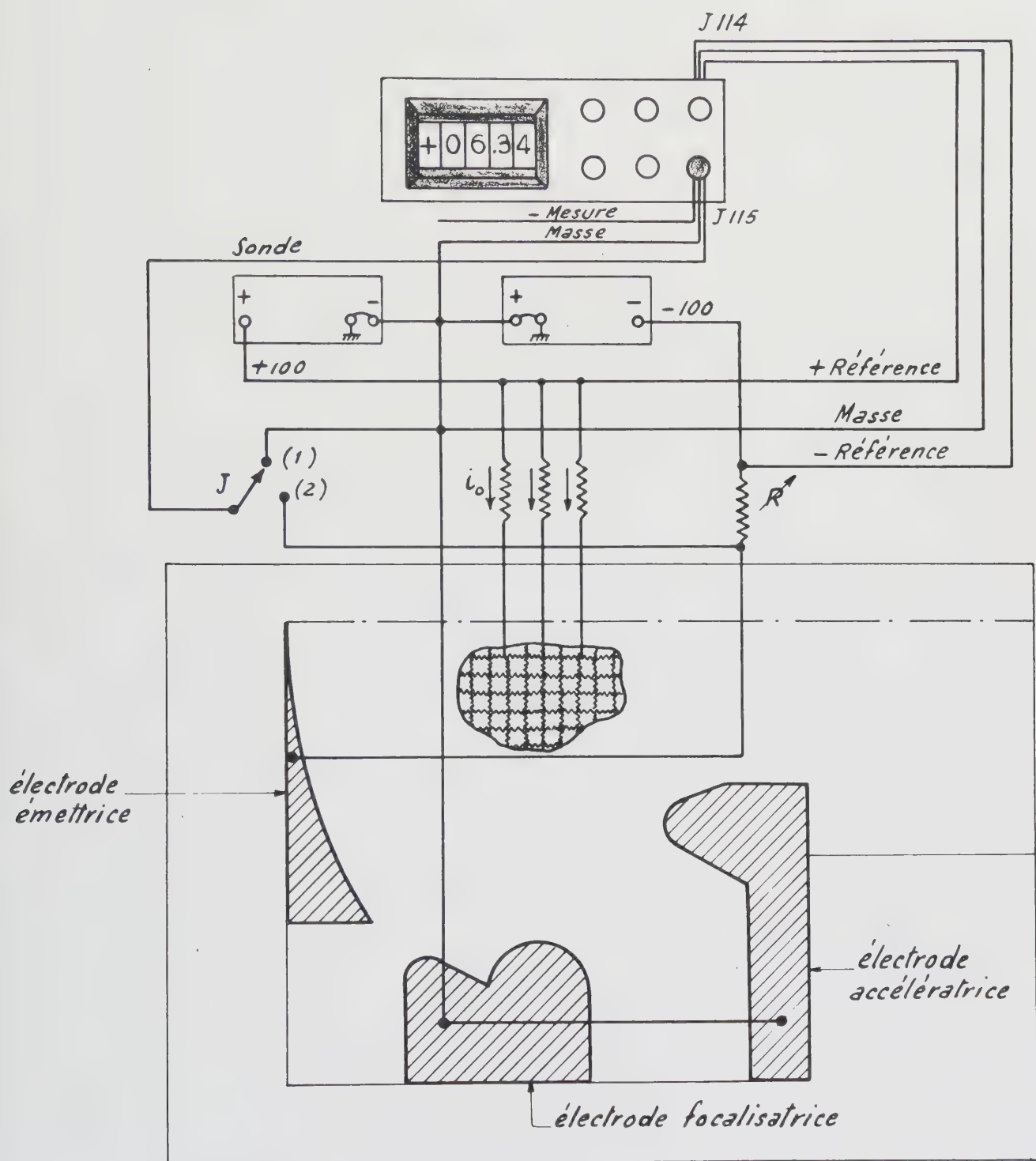
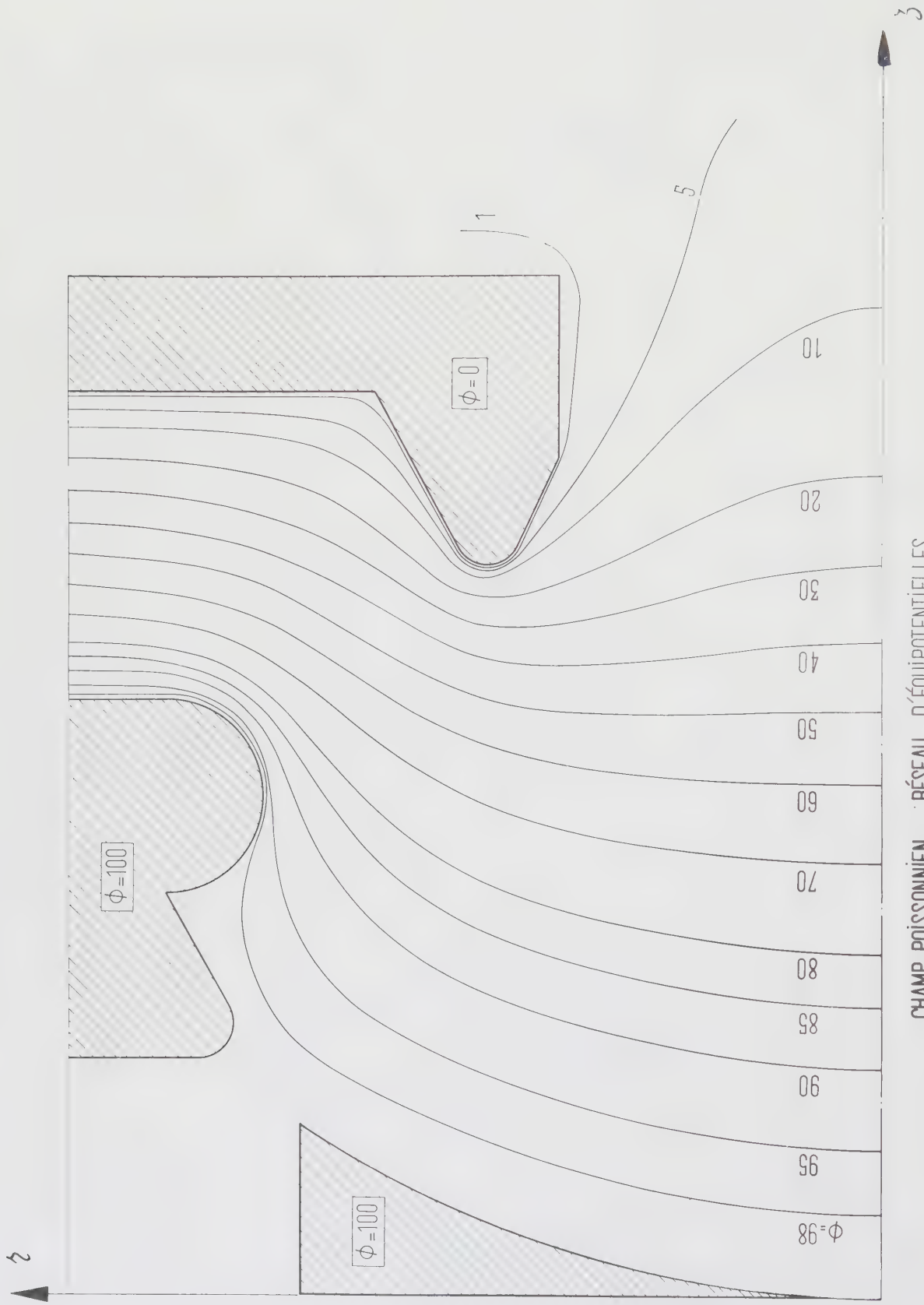


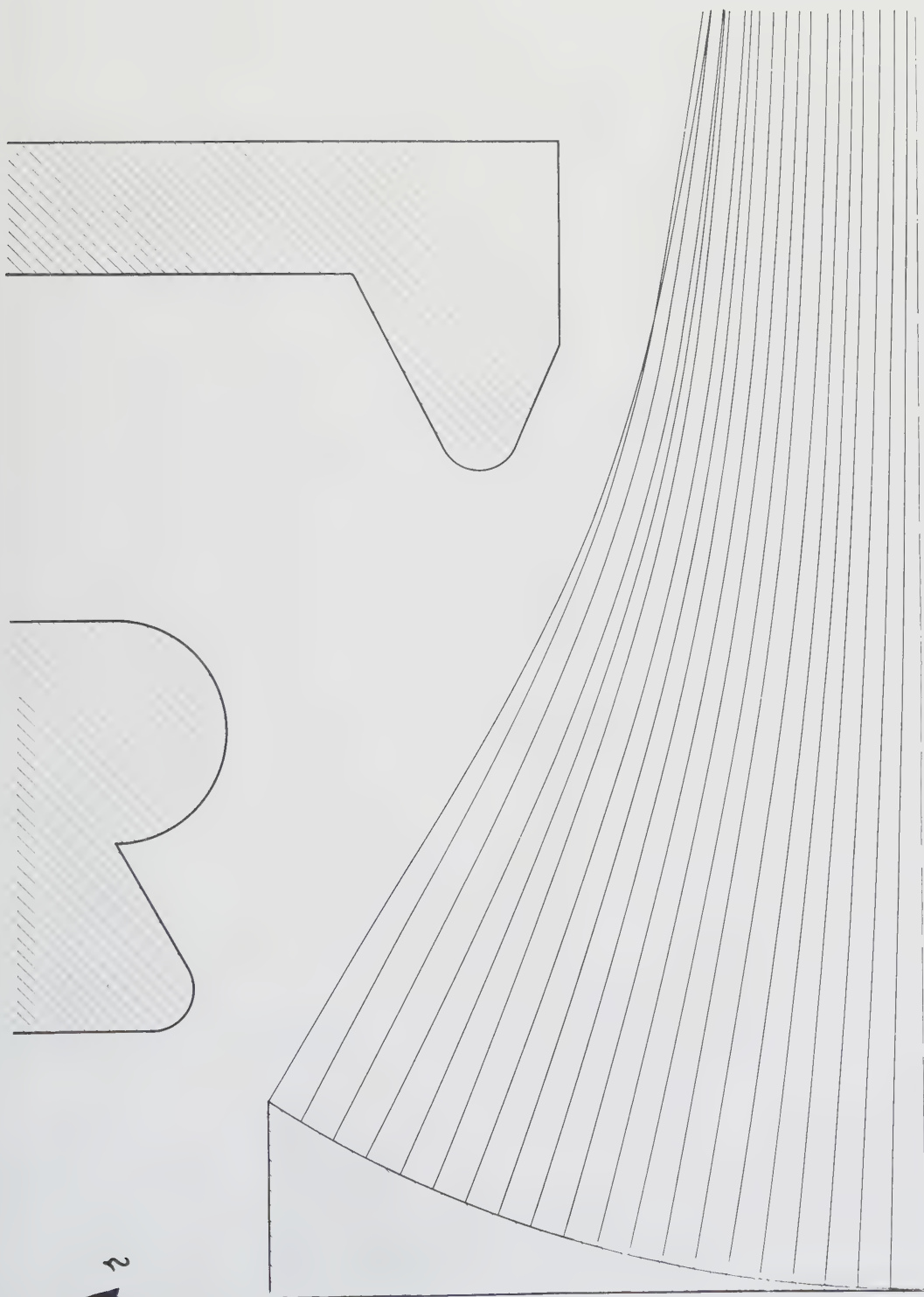
fig. 33



CHAMP POISSONNIEN · RÉSEAU D'ÉQUIPOTENTIELLES

Méthode N°1 4^{ème} Approximation $J_0 = 15 \text{ A/m}^2$

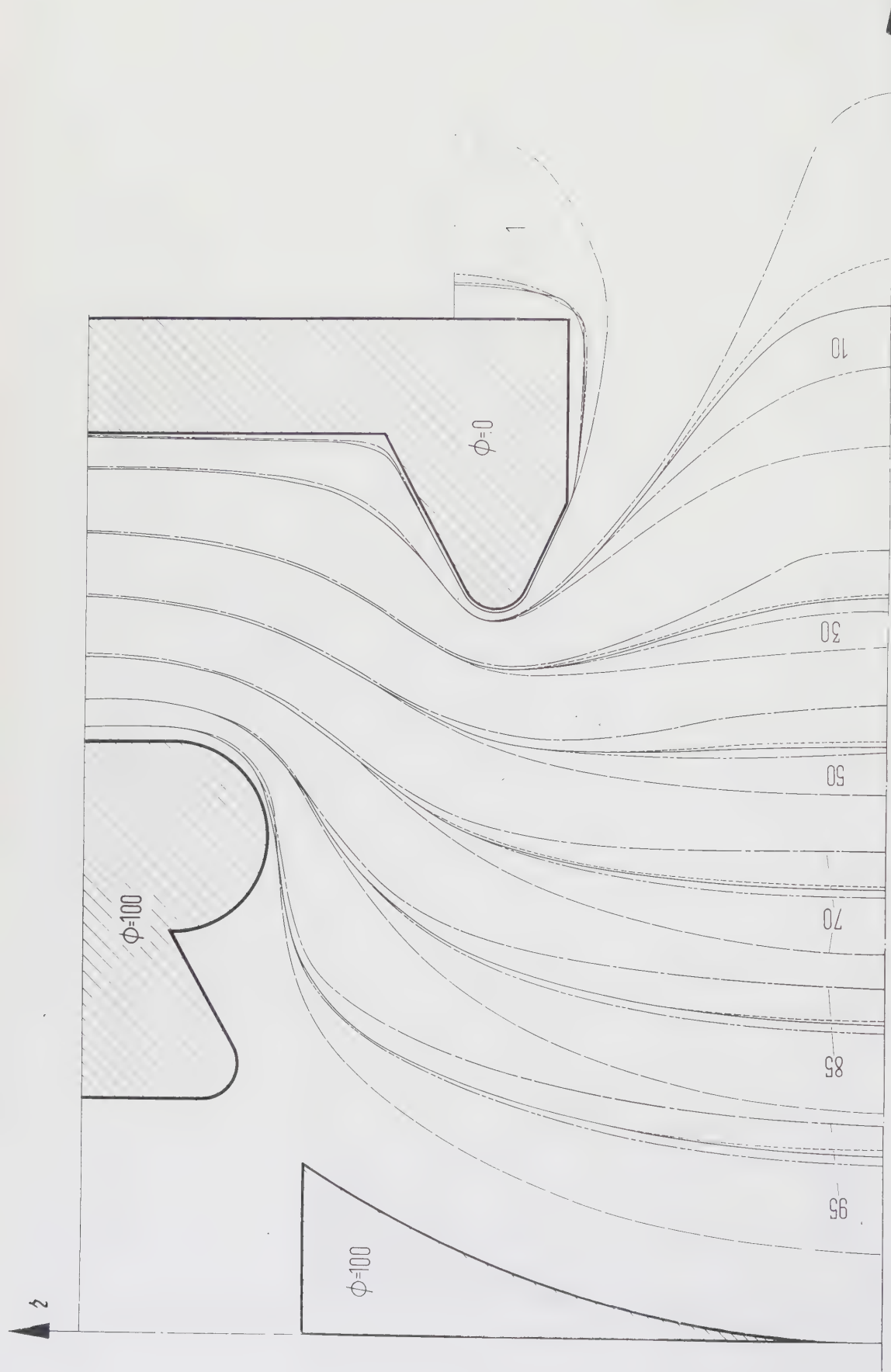
fig. 34



RÉSEAU DE TRAJECTOIRES — CHAMP POISSONNIEN

Méthode N°1 4ème Approximation $J_0 = 15 \text{ A/m}^2$

fig. 35



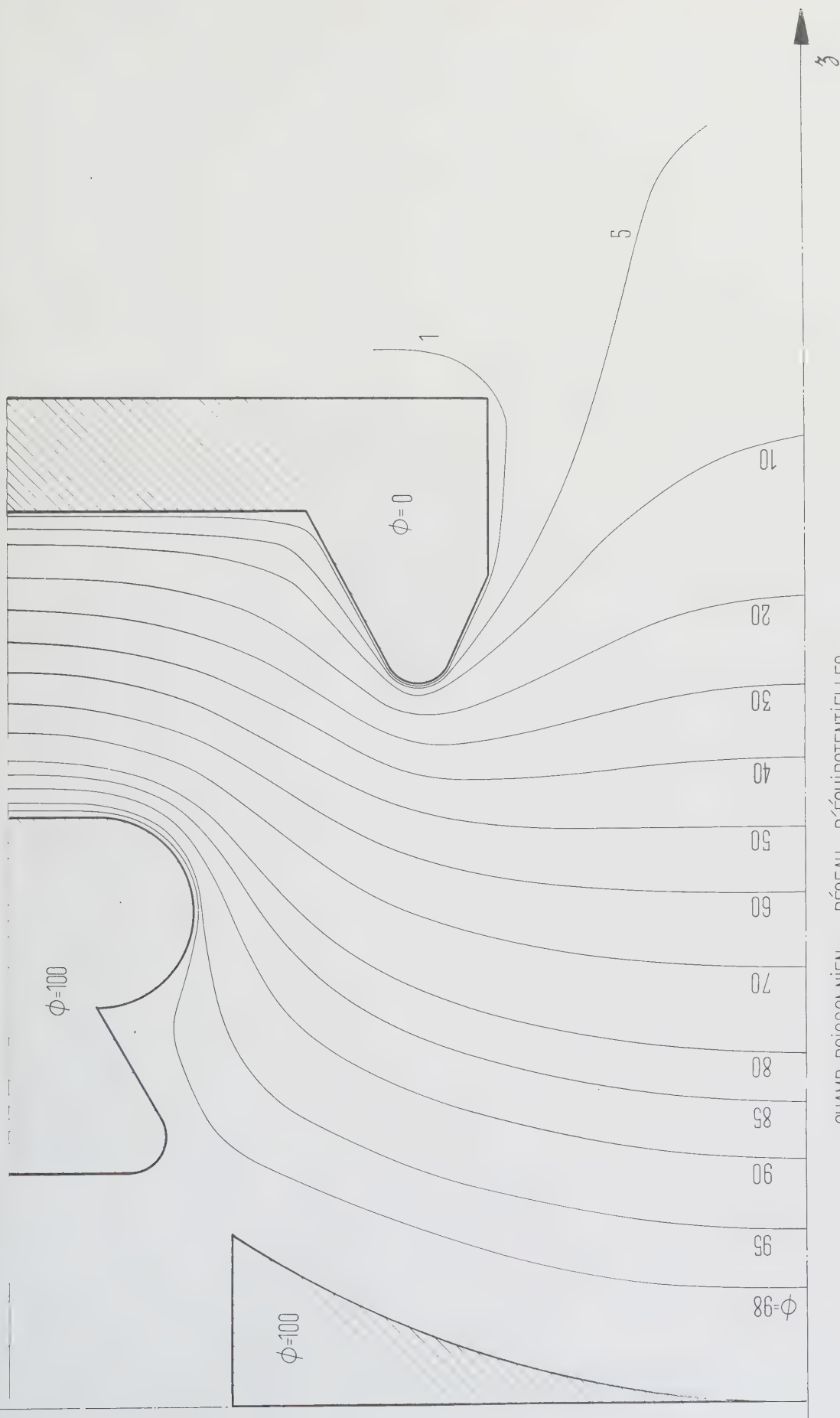
INFLUENCE DE LA CHARGE D'ESPACE

CHAMP LAPLACIEN

1ère Approximation
2ème d°
3ème d°
4ème d°

Méthode N° 2

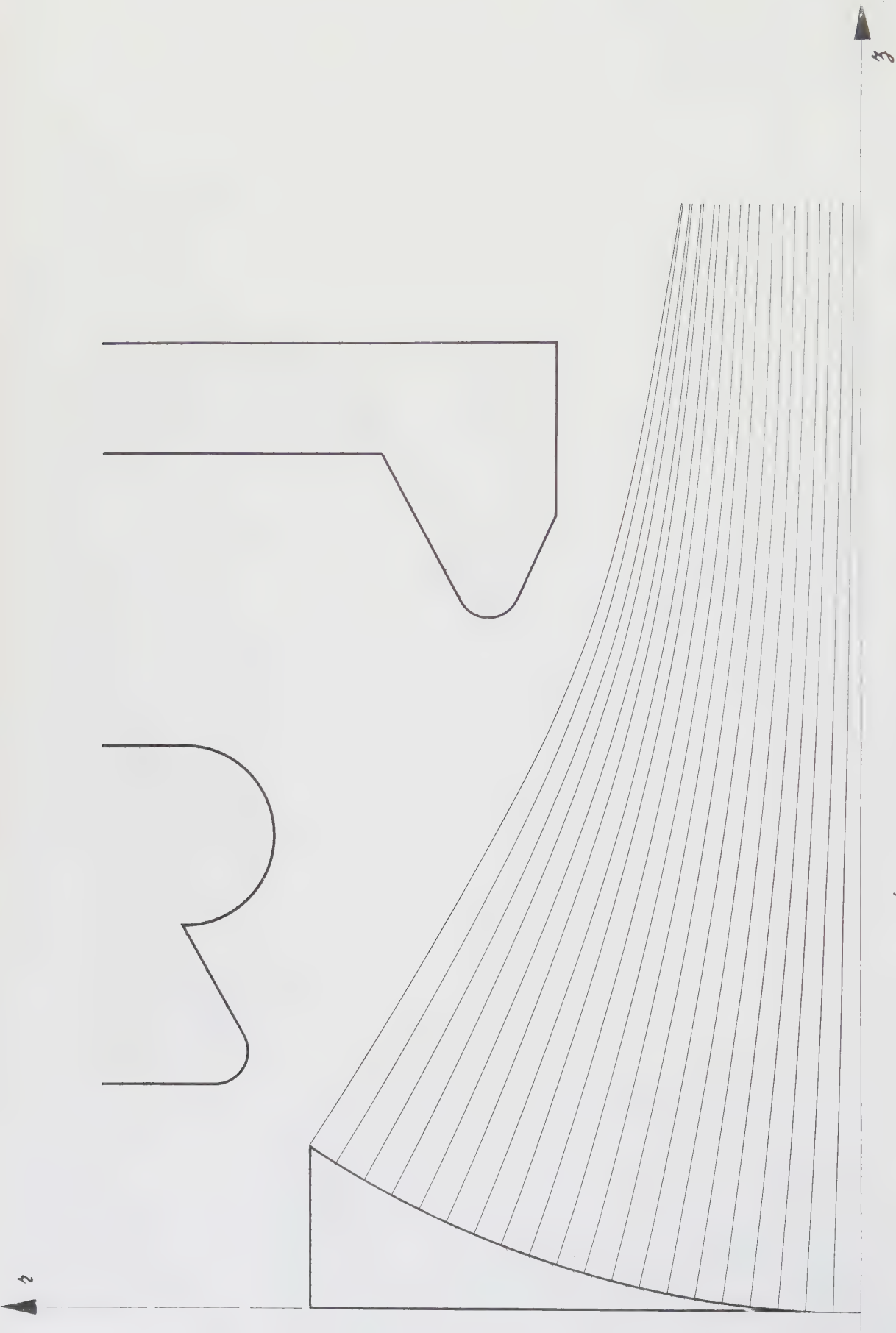
fig. 36



CHAMP POISSONNIEN RÉSEAU D'ÉQUIPOTENTIELLES

Méthode N°3 4ème Approximation $J_0=15,25 \text{ A/m}^2$

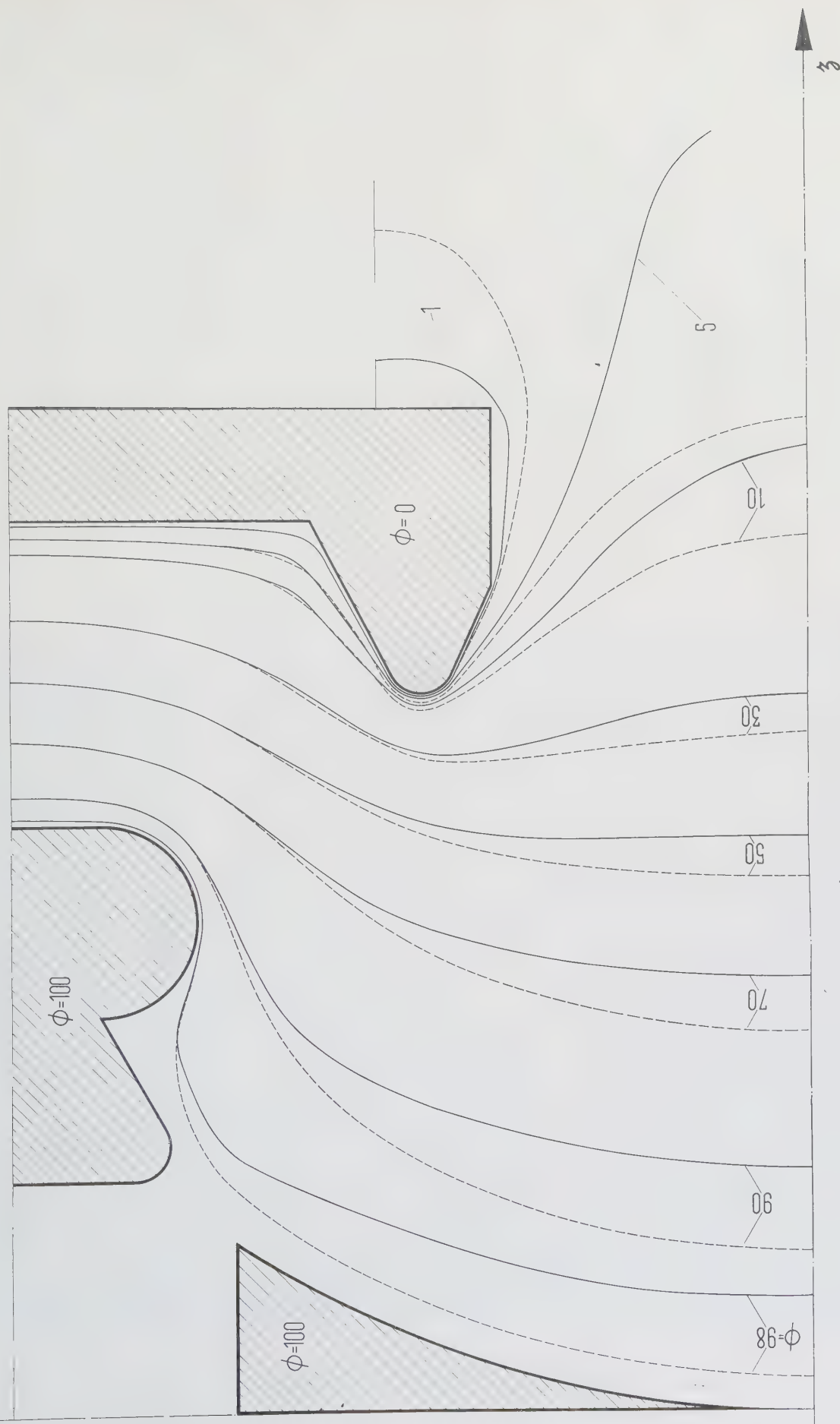
fig. 37



RÉSEAU DE TRAJECTOIRES CHAMP POISSONNIEN

Méthode N° 3 4^{ème} Approximation $J_0 = 15,25 \text{ A/m}^2$

fig. 38

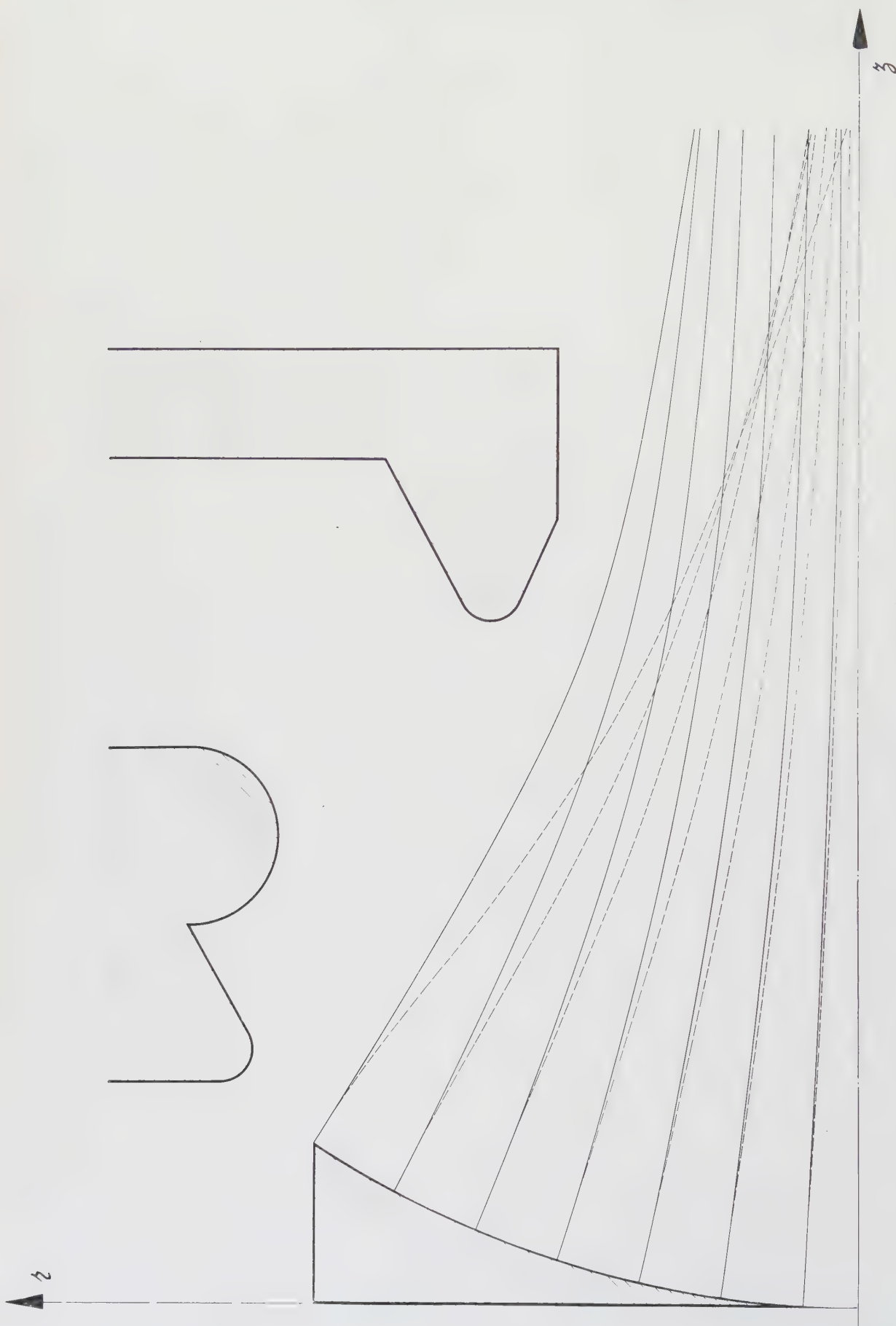


INFLUENCE DE LA CHARGE D'ESPACE

----- CHAMP LAPLACIEN

—— CHAMP POISSONNIEN Méthode N°3

fig. 39



INFLUENCE DE LA CHARGE D'ESPACE

----- CHAMP LAPLACIEN

———— CHAMP POISSONNIEN Méthode N° 3

fig. 40

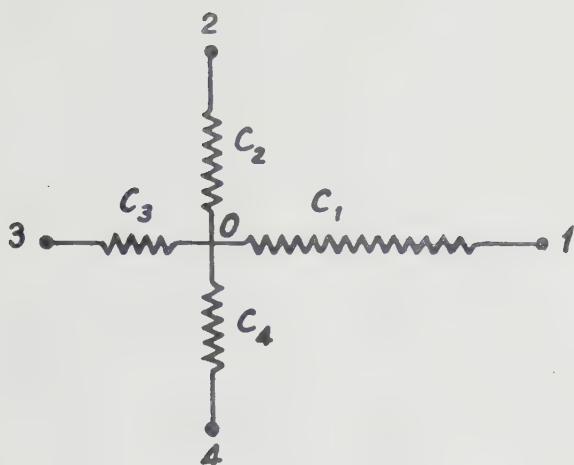


fig. 41

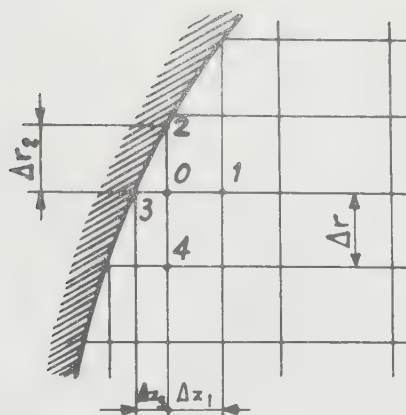


fig. 42

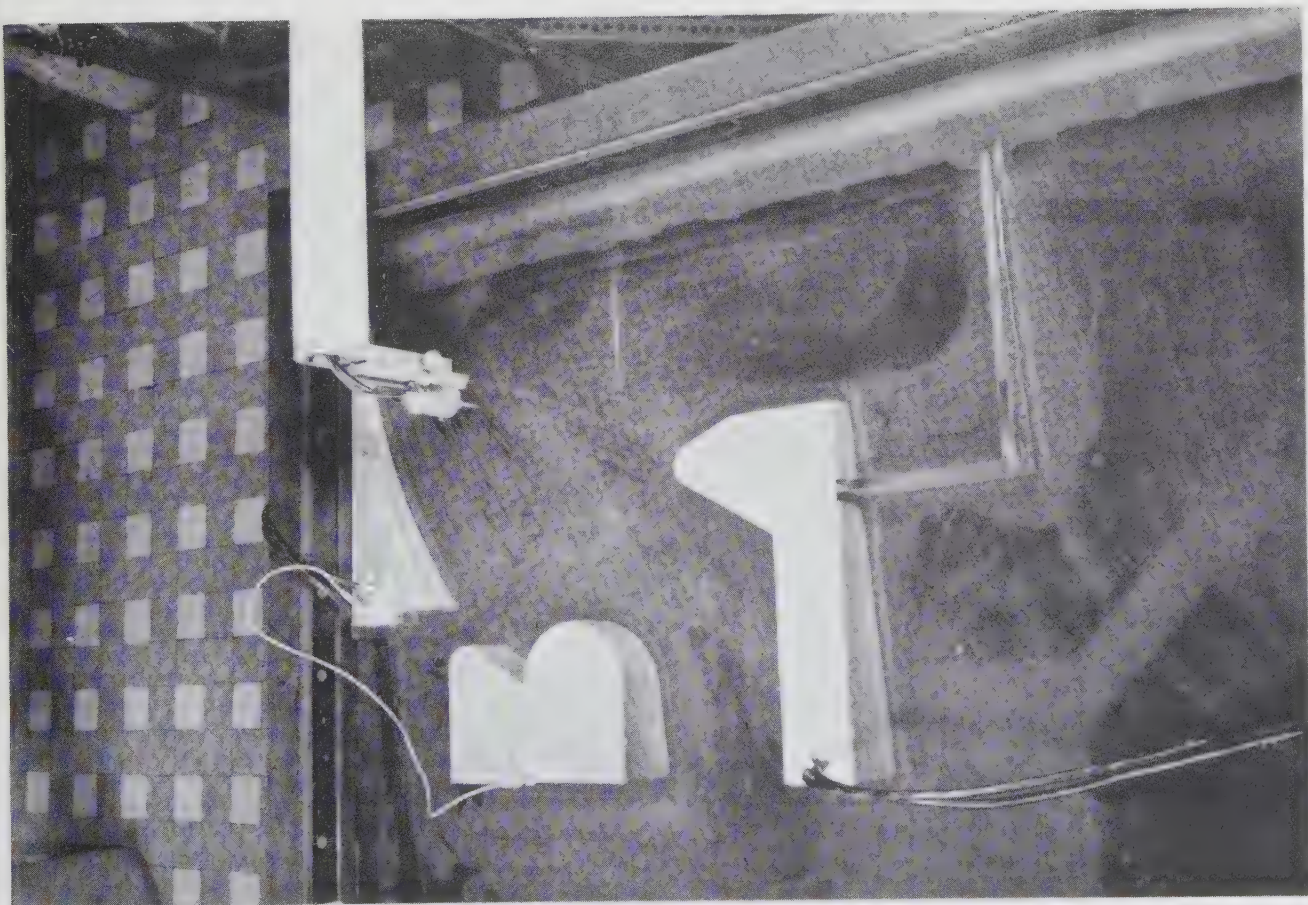


fig. 43

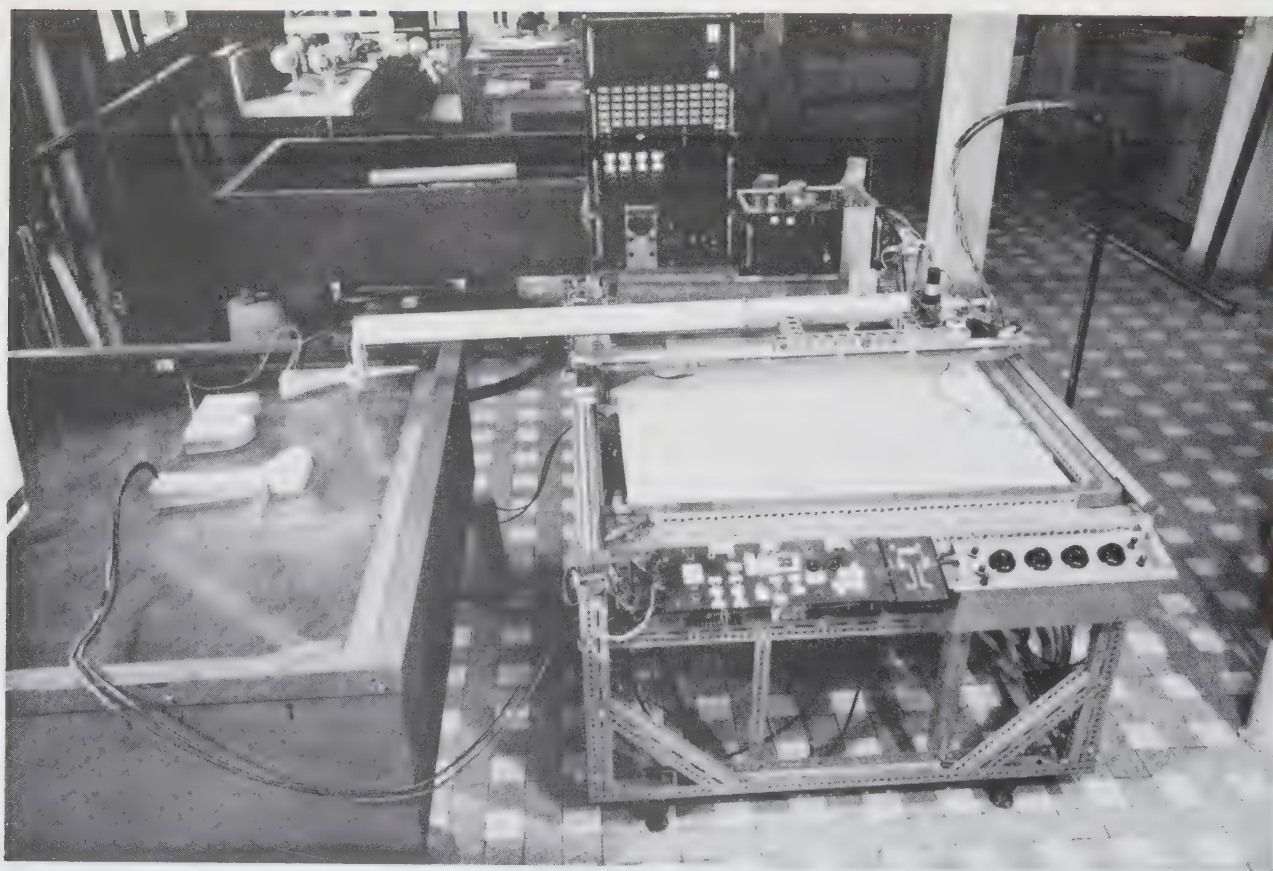
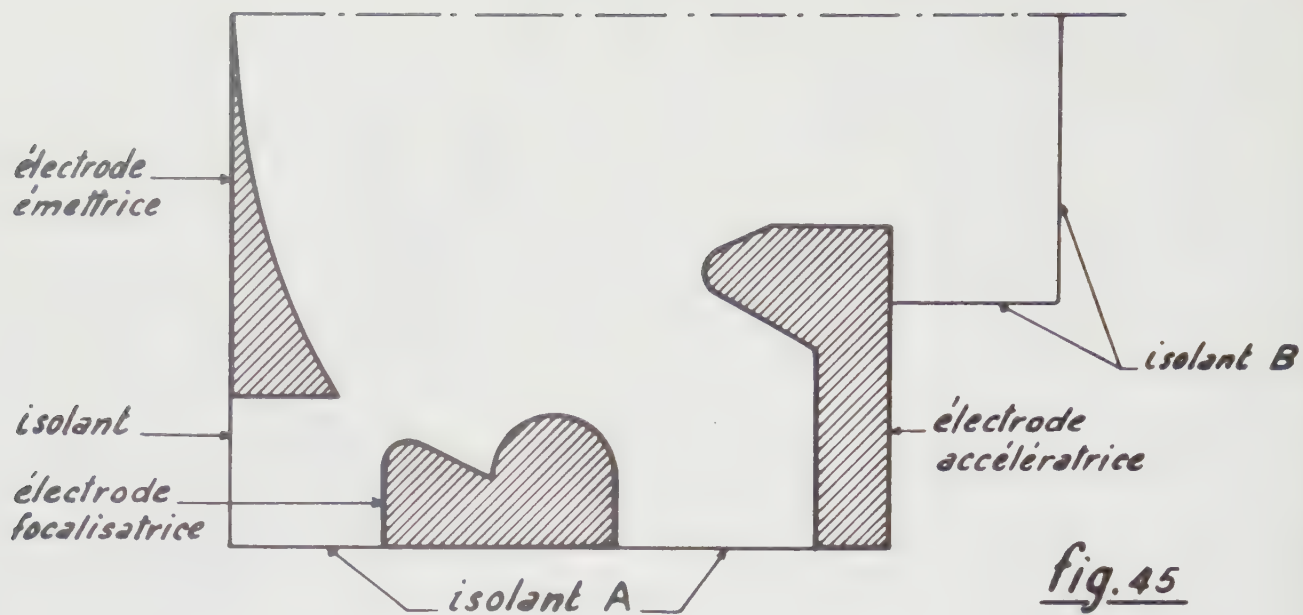


fig. 44

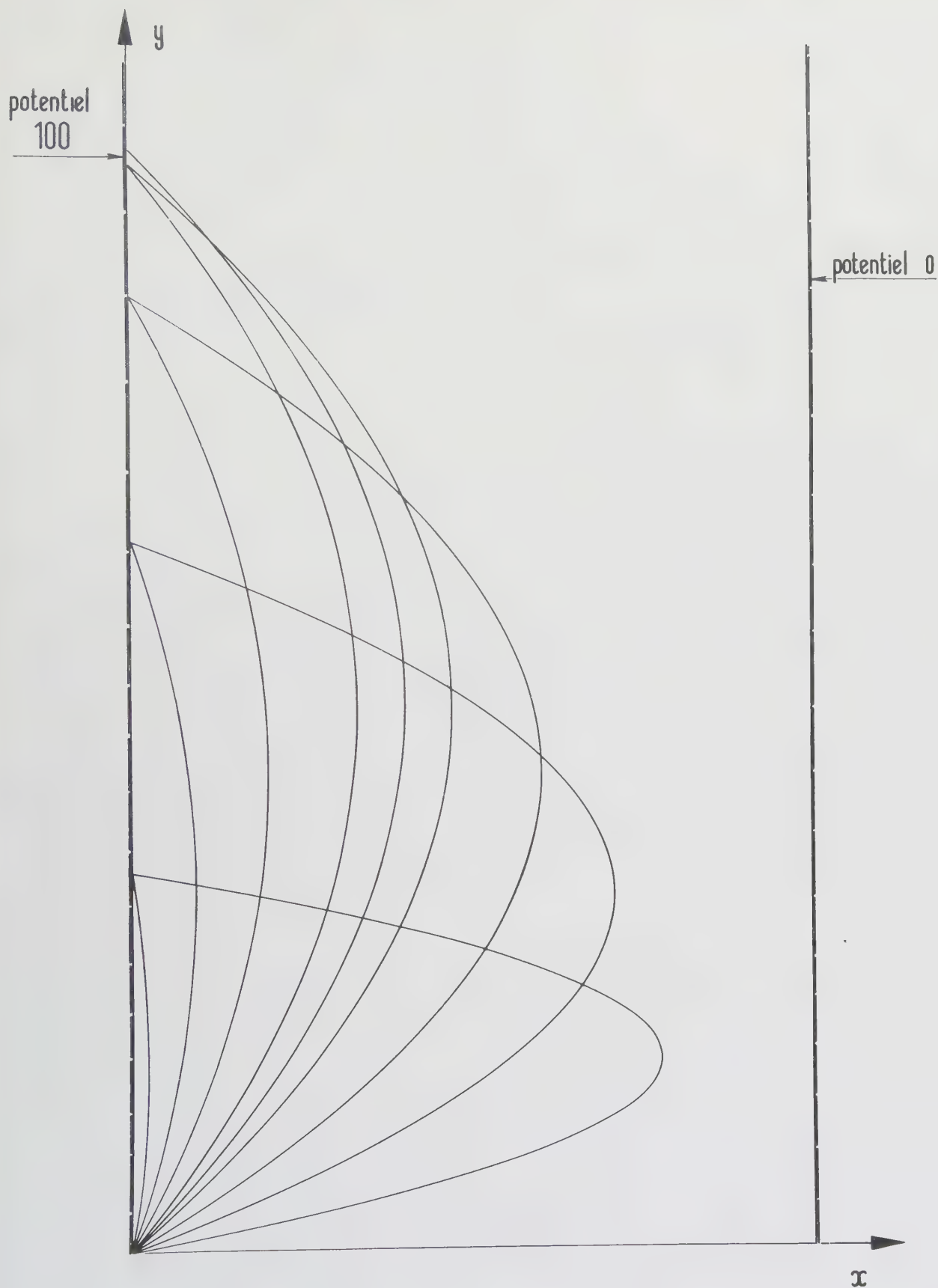


fig. 46

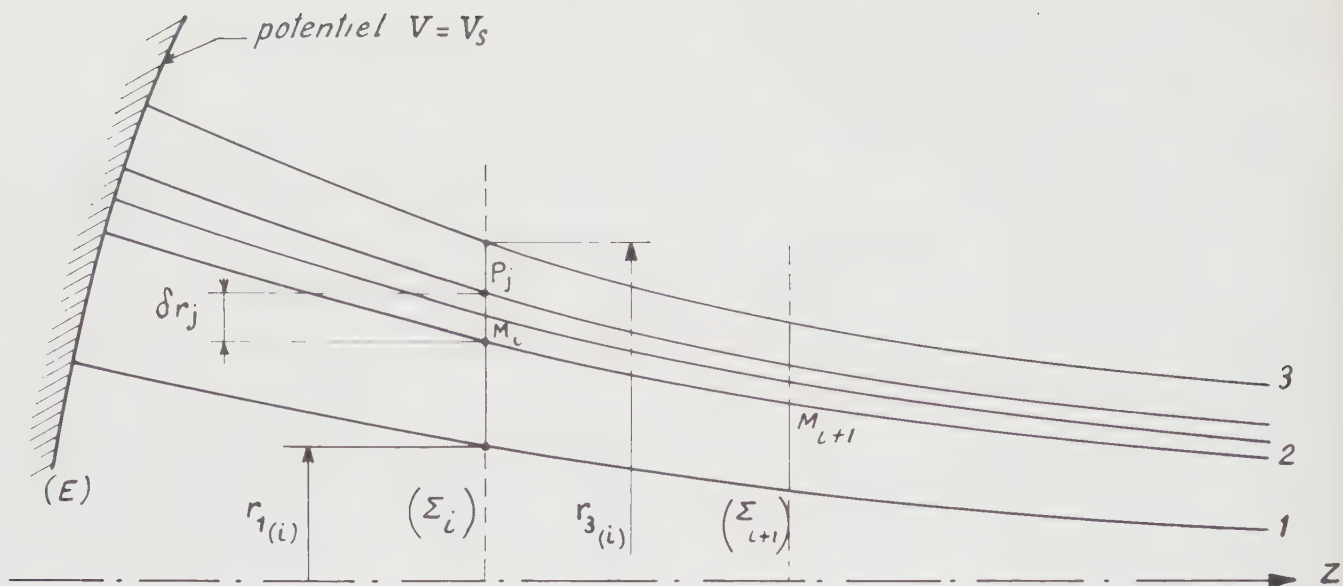


fig. 47

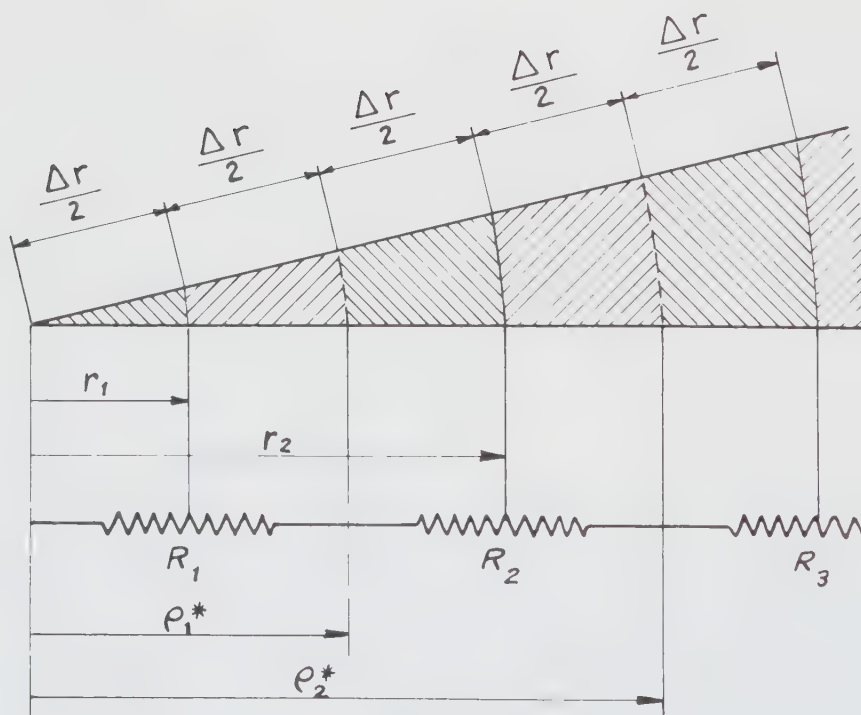
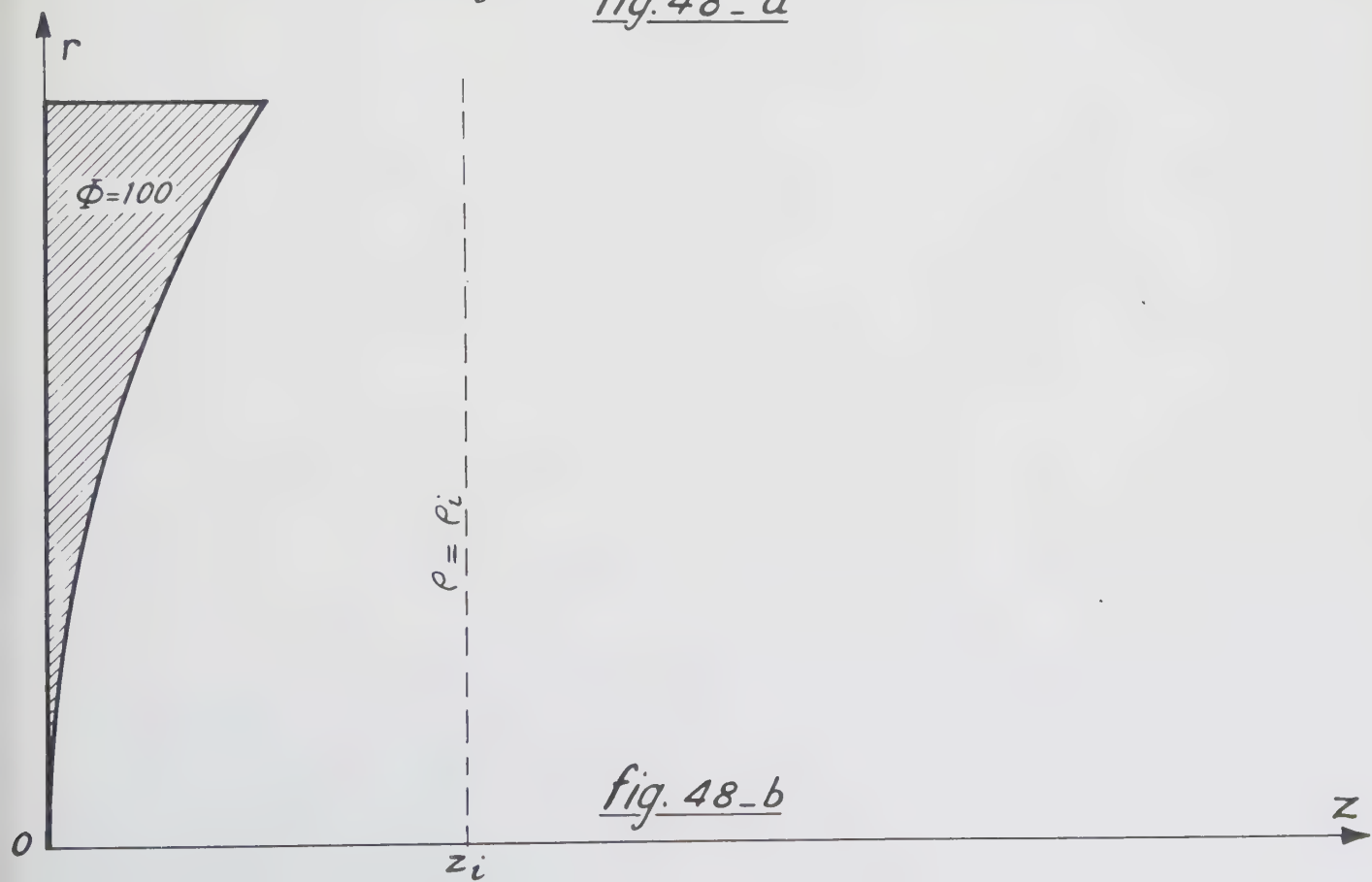
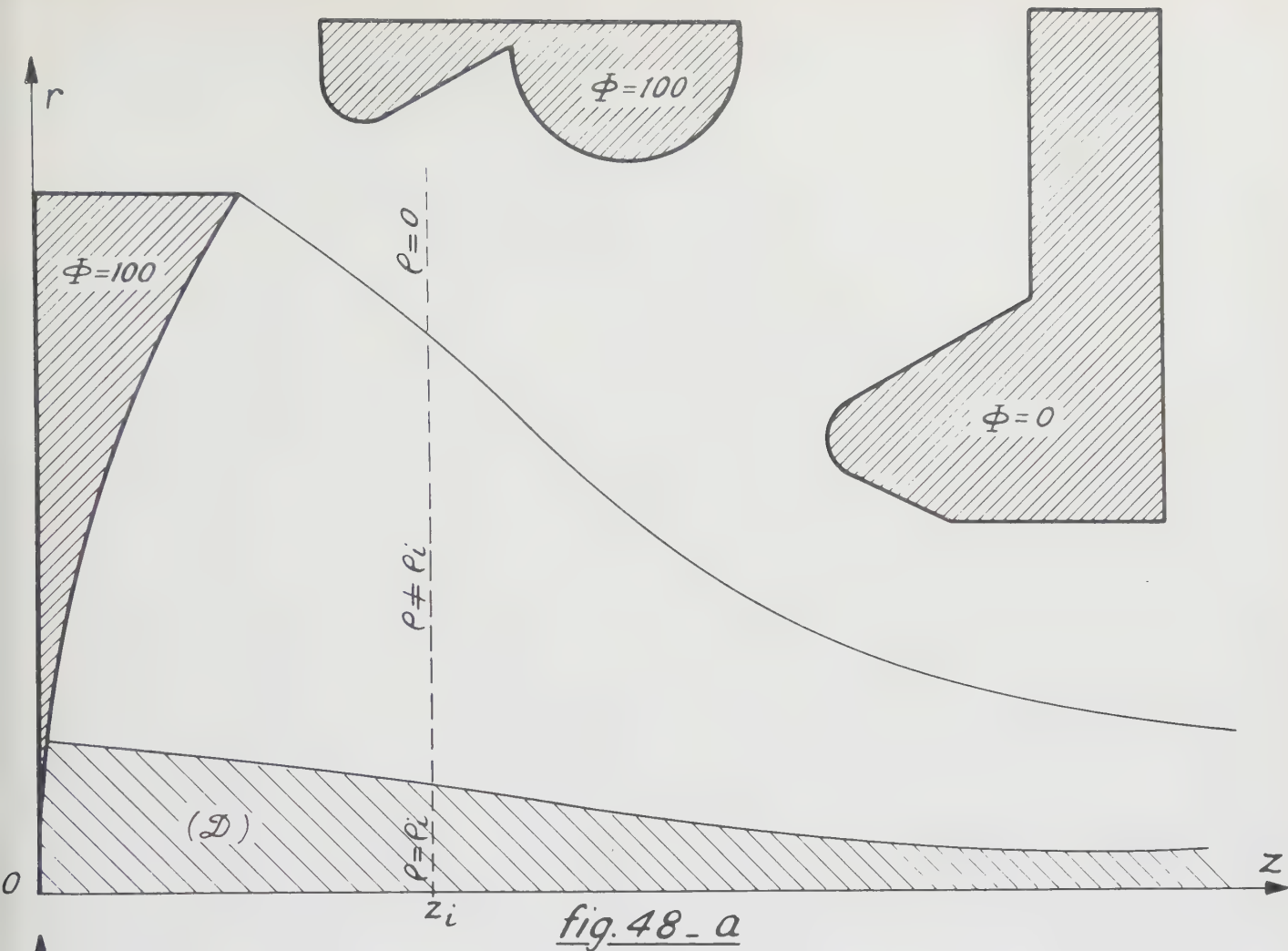
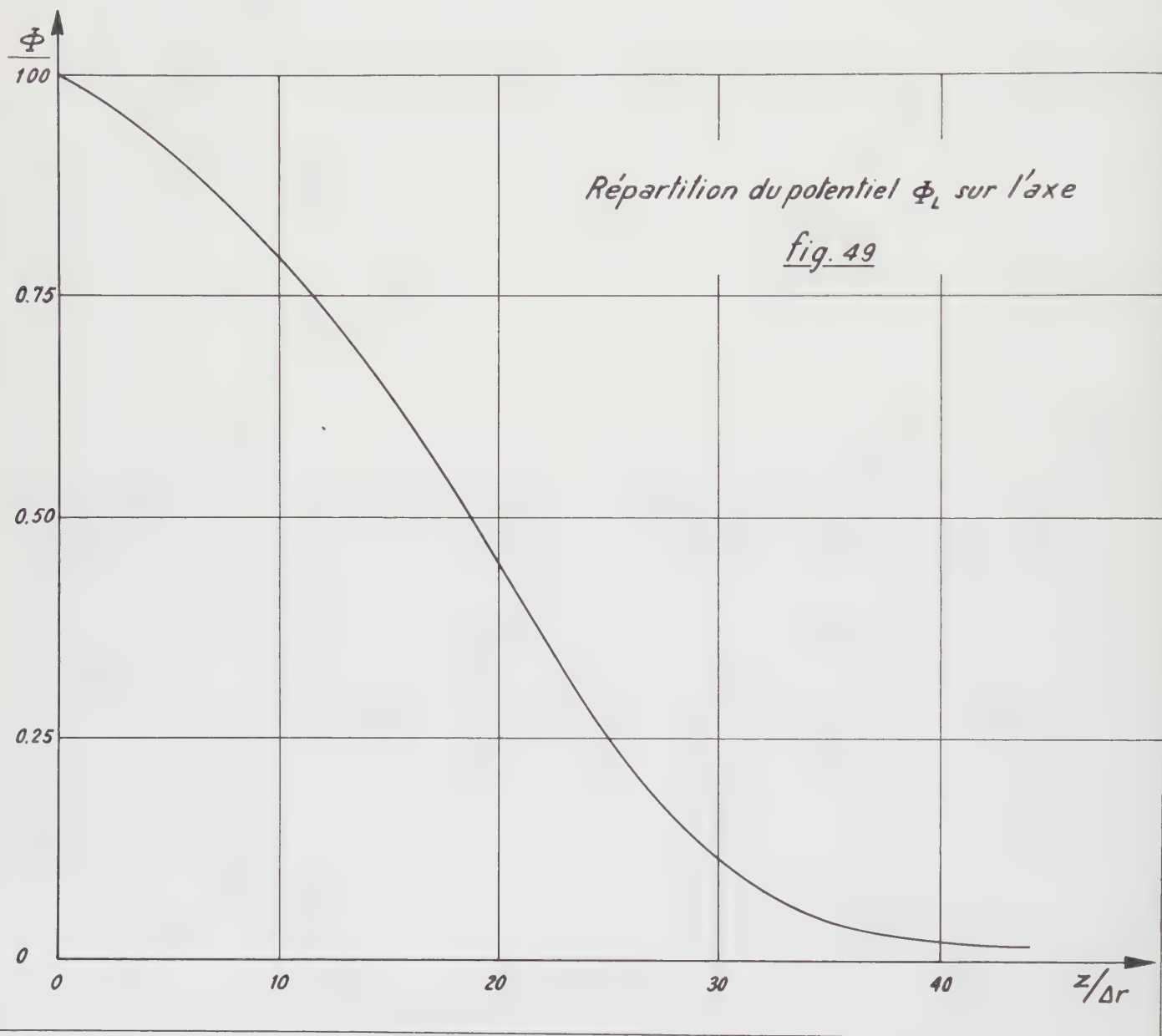


fig. 50





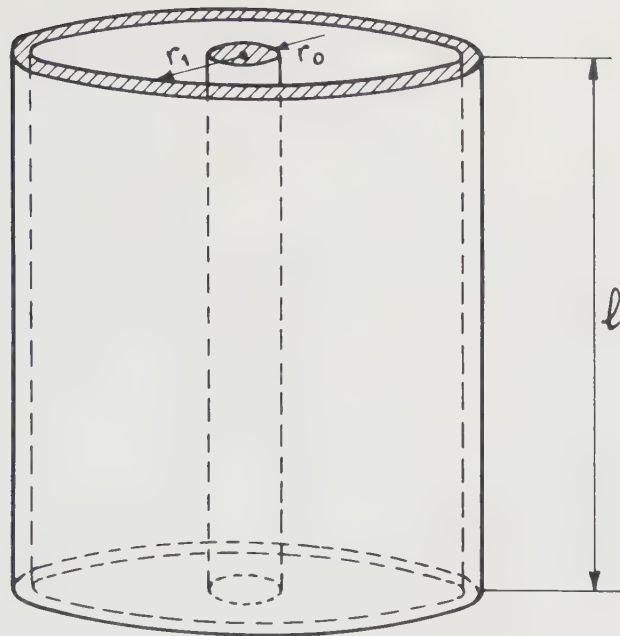


fig. 51

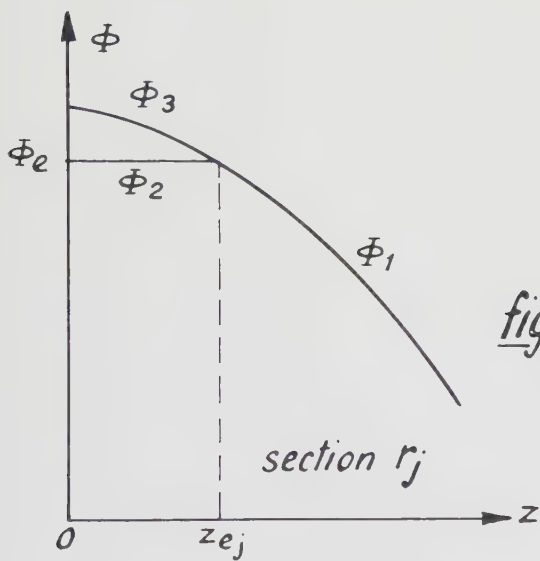


fig. 52

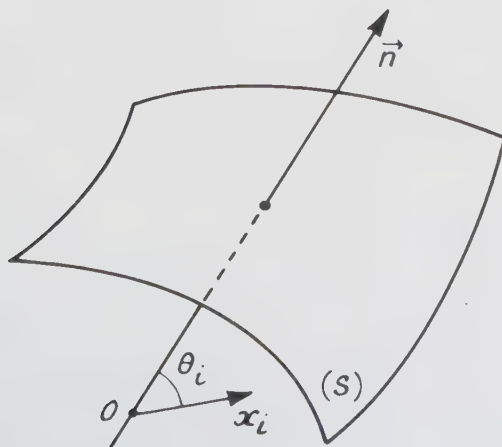
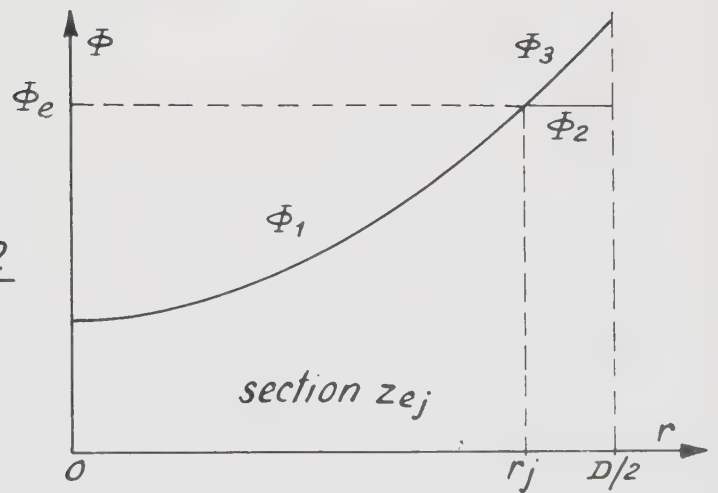


fig. 53

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

MÉCANIQUE DES FLUIDES DES ÉMULSIONS

Vu et approuvé :

Paris, le 12 juillet 1963

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

Marc ZAMANSKY

Vu et permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

Jean ROCHE

